ISSN 1000-1239/CN 11-1777/TP
47(5): 940-947, 2010

# 基于 Epanechnikov 混合模型的中心化模糊模型

张钦礼[1,2]　　王士同[2]
[1](北华航天工业学院基础科学部　河北廊坊　065000)
[2](江南大学信息工程学院　江苏无锡　214122)
(zhangql1972@yahoo.cn)

# A Novel Rule-Centered Fuzzy Model Induced by Epanechnikov Mixtures

Zhang Qinli[1,2] and Wang Shitong[2]
[1](*Department of Basic Science, North China Institute of Aerospace Engineering, Langfang, Hebei* 065000)
[2](*School of Information Engineering, Jiangnan University, Wuxi, Jiangsu* 214122)

**Abstract** This work explores how mixture model based on Epanechnikov kernel functions, termed here as Epanechnikov mixture model (EMM), can be translated into a rule-centered generalized fuzzy model (RCGFM) with multidimensional Epanechnikov membership functions that take into consideration of the correlation among components of sample data and therefore result in a more effective partition of the input space. Thus, the new fuzzy model can be interpreted probabilistically, i.e., the conditional means of an EMM corresponds to the defuzzified output of a RCGFM and the coefficients represented by the means and/or variances in probability theory in the consequent polynomials of fuzzy rules can be exactly interpreted as Taylor series coefficients. The differential theory is combined with the fuzzy theory. Furthermore, the proposed model yields a smaller number of fuzzy rules and inputs, because the compactly supported polynomial Epanechnikov membership functions minimize the asymptotic mean integrated squared error with the optimal kernel efficiency. As demonstrated by the experimental results in several benchmarking datasets, the EMM linked RCGFM as the fuzzy model EMM-RCGFM is superior to other fuzzy models in modeling accuracy and robustness, besides generating a small set of probabilistically interpretable fuzzy rules. This work represents a very first attempt to exhibit the applicability of Epanechnikov kernel functions as fuzzy membership functions.

**Key words** Epanechnikov mixture model (EMM); rule-centered generalized fuzzy model (RCGFM); multi-dimensional membership function; expectation maximization (EM); Gaussian mixture model (GMM)

**摘　要**　基于 Epanechnikov 混合模型提出了一种新的模糊模型——具有多维隶属度函数的规则中心化模糊模型.它容易设计:任何一个 Epanechnikov 混合模型都唯一对应着一个规则中心化的模糊模型,Epanechnikov 混合模型的条件期望输出是规则中心化的模糊模型的去模糊化输出;它具有高度的可解释性:其规则后件恰好是其输出在规则中心的一阶 Taylor 级数展开;它采用了多维隶属度函数,考虑了输入数据各个分量之间的相关性,更符合实际问题.对两个典型实例的仿真实验表明,由 Epanechnikov 混合模型设计的规则中心化的模糊模型比其他模糊模型速度快、精度高、鲁棒性好.

**收稿日期**:2008-11-28;**修回日期**:2009-12-07
**基金项目**:国家自然科学基金项目(60773206/F020106,60704047/030304);国家"八六三"高技术研究发展计划基金项目(2007AA1Z158,2006AA10Z313);北华航天工业学院科研基金项目(KY-2008-14);北华航天工业学院博士基金项目(KY-2009-05-B)

**关键词** Epanechnikov 混合模型(EMM);规则中心化的模糊模型;多维隶属度函数;期望最大化算法;高斯混合模型

**中图法分类号** TP18

## 0 引 言

概率理论和模糊理论是两种不同的处理不确定性问题的理论,各有各的优点.概率理论有严格的数学理论基础,经过长时间的发展已经非常成熟和完善,主要用来处理随机不确定的问题;模糊理论有很好的可解释性,主要用来处理语义不确定的问题.如果我们能建立二者间的联系,那么二者就会互为补充,相得益彰[1-4].近来,Gan 等人[5-6]结合概率和模糊提出了基于 GMM 的广义模糊模型(GFM).其方法是先通过 EM 算法训练 GMM,确定模糊模型的结构和前件;然后求出 GMM 的条件期望,确定模糊模型的后件和输出.这种模糊模型有很多优点,如模糊模型的结构和规则很容易确定,规则很少就能到达很高的精度,容易抓住数据的局部特征等.我们把这种模糊模型简记为 GMM-GFM.

但是,GMM-GFM 也有许多缺陷:

第一, GMM-GFM 没有考虑输入数据各个分量之间的相关性,而是将输入空间分割成若干个相互独立的子空间,这样容易造成"维数灾",并且与实际问题不符.对这个问题,很多人提出了自己的解决办法.Kim 等人[7]提出了一种考虑数据分量之间相关性的模糊建模方法,就是先利用 Karhunen-Love 变换去除数据的相关性,然后再对输入空间进行独立分割.这种方法改善了模型的性能,但由于去除相关性需要求矩阵的特征向量和特征值,所以计算复杂度非常高,只适用于低维输入变量的情况.Kroll[8]提出了一种直接识别前件多维隶属度函数的方法,就是借用 FCM 算法求隶属度的方法和 Euclid 范数确定多维的隶属度函数.这种方法的主要好处是实现了前件的自动识别;它的缺点是对噪音和例外点敏感.Abonyi 等人[9]提出了另外一种直接识别前件多维隶属度函数的方法,就是利用 Delaunay 三角剖分算法、单纯形算法及插值算法确定前件多维隶属度函数.这种方法好处是融入了先验知识,模型复杂度降低,但模型的精度偏低,且有时不稳定.

第二,GMM-GFM 缺乏可解释性.为此,Wang 等人[10]提出了一种中心化的 TSK 模糊模型,记为 CCTSKFS. CCTSKFS 的突出特点是具有可解释性,规则后件是模型输出在规则中心的 Taylor 展开式.但 CCTSK 采用了级联的形式,模型训练时间太长.

第三,GMM-GFM 使用的是 Gauss 核函数,而 Gauss 核函数全局性质差,对核的宽度敏感,外推能力不强,计算复杂(尤其是积分时),因此影响了模型的性能,如逼近精度和计算复杂度等.

基于以上分析,在 Epanechnikov 混合模型的基础上,我们提出了一种新的模糊模型——具有多维隶属度函数的规则中心化的广义模糊模型.首先,利用 Epanechnikov 核密度函数建立了 Epanechnikov 混合模型(EMM),然后利用 EM 算法训练 EMM,最后求出其条件期望.在此基础上,建立了具有多维隶属度函数的规则中心化的广义模糊模型(RCGFM),简记为 EMM-RCGFM. EMM 的组件数为 RCGFM 的规则数; EMM 的条件期望输出的每一个组件的非线性部分是相应模糊规则的隶属度函数,而线性部分是后件的质心;EMM 各组件的先验概率为相应规则后件的模糊度. EMM-RCGFM 具有 3 个优点:第一, 模型采用具有相关性的多维隶属度函数,而不是多个独立的一维隶属度函数的张量积,考虑了输入数据的相关性,更符合现实生活中的实际问题;第二, EMM-RCGFM 具有高度的可解释性,模糊模型后件恰好是模型输出的一阶 Taylor 级数展式;第三,EMM-RCGFM 使用的是 Epanechnikov 核函数.该核函数是具有紧支集的多项式形式核函数(Gauss 核函数是不具有紧支集的复杂指数函数),计算简单[11],有着良好的全局性质和很强的外推能力, 对核的宽度不敏感[12],有最小的 AMISE (asymptotic mean integrated squared error)和最优的核效率 1(Gauss 核的效率仅为 0.951)[13].因而 EMM-RCGFM 计算速度快、精度高、鲁棒性好,尤其在对边界点处显示良好的性能.对两个标准数据集仿真实验的结果验证了我们的结论.

## 1 规则中心化的广义模糊模型和 Epanechnikov 混合模型及其相互关系

### 1.1 规则中心化的广义模糊模型(RCGFM)

为了使模糊模型简单容易处理和具有很好的

解释性,并且考虑数据各分量之间的相关性,从而更好地反映问题的实际情况不造成“维数灾”,根据 Azeem 等人[14]提出广义模糊模型(GFM)和 Abonyi 等人提出 0 阶 Takagi-Sugeno 模糊模型,我们将规则后件的质心中心化,提出以下具有多维隶属度函数的规则中心化的的广义模糊模型(RCGFM).

$R^k$:如果 $\boldsymbol{x}$ 是 $A^k(\boldsymbol{x})$,则 $y$ 是 $B^k(f^k(\boldsymbol{x}),v_k)$ $(k=1,2,\cdots,M)$,

其中,$\boldsymbol{x}$ 为输入数据向量;$A^k(\boldsymbol{x})$为定义在 $\boldsymbol{x}$ 上的模糊集,$\mu^k(\boldsymbol{x})$为其 $D$ 元隶属度函数.

将 $f^k(\boldsymbol{x})$中心化:

$$f^k(\boldsymbol{x})=b_0^k+b_1^k(x_1-r_1^k)+\cdots+b_D^k(x_D-r_D^k),$$

其中,$\boldsymbol{r}^k=(r_1^k,\cdots,r_D^k)^{\mathrm{T}}$ 为第 $k$ 个规则的中心,即为隶属度函数 $\mu^k(\boldsymbol{x})$的均值向量.

其去模糊化输出为

$$y^o=\sum_{k=1}^{M}\frac{\mu^k(\boldsymbol{x})\times v_k}{\sum_{k'=1}^{M}\mu^{k'}(\boldsymbol{x})\times v_{k'}}\times f^k(\boldsymbol{x}). \tag{1}$$

### 1.2 Epanechnikov 混合模型(EMM)

根据 Epanechnikov 核函数[15],我们定义如下的广义 Epanechnikov 核函数:

$$G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a},\boldsymbol{A})=\begin{cases}K^2-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\\ \quad (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\leqslant K^2;\\ 0,\ \text{otherwise.}\end{cases}$$

其中,$\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,$\boldsymbol{a}$ 为 $n$ 维向量.

利用广义 Epanechnikov 核函数可以定义如下具有 $A(A\geqslant 2)$个属性和 $C$ 个组件的 Epanechnikov 混合模型(EMM):

Epanechnikov 混合分布的概率密度函数(probability density function, PDF)定义为

$$G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})=\sum_{c=1}^{C}p_cG_{Ac}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu}_c,\boldsymbol{\Sigma}_c), \tag{2}$$

其中,$p_c$ 为混合参数,表示各混合成分所占比例,且 $0<p_c<1$, $\sum_{c=1}^{C}p_c=1$;$\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_C)$; $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_A)^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{\Sigma}=(\boldsymbol{\Sigma}_1,\boldsymbol{\Sigma}_2,\cdots,\boldsymbol{\Sigma}_C)$,$\boldsymbol{\Sigma}_c=(\sigma_{cij})_{A\times A}$ 为协方差矩阵;$\boldsymbol{\mu}=(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\cdots,\boldsymbol{\mu}_C)$, $\boldsymbol{\mu}_c=(\mu_{c1},\mu_{c2},\cdots,\mu_{cA})^{\mathrm{T}}$ 为均值向量;$G_{Ac}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu}_c,\boldsymbol{\Sigma}_c)$为广义 Epanechnikov 核密度函数:

$$G_{Ac}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu}_c,\boldsymbol{\Sigma}_c)=\begin{cases}\dfrac{1}{V_A}[K^2-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_c)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_c^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_c)]\\ \quad (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_c)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_c^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_c)\leqslant K^2;\\ 0,\ \text{otherwise.}\end{cases}$$

其中,$V_A$ 是 $K^2-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_c)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_c^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_c)$ 在 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_c)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_c^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_c)\leqslant K^2$ 范围内的 $A$ 重积分值.

### 1.3 多维 EMM 和多输入单输出的 RCGFM 的关系

所有的系统都可归结为多输入单输出的系统.因为单输入单输出系统是它的特例,任何多输入多输出系统都可归结为几个多输入单输出的系统,所以只需研究多输入单输出的系统.

令输入为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_J)^{\mathrm{T}}$,输出为 $y$,则有 $C$ 个组件的 $J+1$ 维 EMM 为

$$G(\boldsymbol{x},y)=\sum_{c=1}^{C}p_cG_{(J+1)c}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ y\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_{cx}\\ \mu_{cy}\end{bmatrix},\boldsymbol{\Sigma}_c\right), \tag{3}$$

其中,

$$\boldsymbol{\Sigma}_c=\begin{pmatrix}\{\boldsymbol{\sigma}_{cij}\}_{J\times J} & \{\boldsymbol{\sigma}_{cj(J+1)}\}_{J\times 1}\\ \{\boldsymbol{\sigma}_{c(J+1)j}\}_{1\times J} & \boldsymbol{\sigma}_{c(J+1)(J+1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}_{cxx} & \boldsymbol{\sigma}_{cxy}\\ \boldsymbol{\sigma}_{cyx} & \sigma_{cyy}\end{pmatrix}$$

是一个对称的协方差矩阵.

令其逆矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}_c^{-1}$,则

$$\boldsymbol{\Sigma}_c^{-1}=\begin{pmatrix}\{\boldsymbol{\sigma}^{cij}\}_{J\times J} & \{\boldsymbol{\sigma}^{cj(J+1)}\}_{J\times 1}\\ \{\boldsymbol{\sigma}^{c(J+1)j}\}_{1\times J} & \boldsymbol{\sigma}^{c(J+1)(J+1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}^{cxx} & \boldsymbol{\sigma}^{cxy}\\ \boldsymbol{\sigma}^{cyx} & \sigma^{cyy}\end{pmatrix}$$

也是一个对称矩阵;令 $\mu_{cy}=\mu_{c(J+1)}$ 为均值,$\boldsymbol{\mu}_{cx}=(\mu_{c1},\mu_{c2},\cdots,\mu_{cJ})^{\mathrm{T}}$ 为均值向量.

利用以上的 $G(\boldsymbol{x},y)$可求得 $y$ 对 $\boldsymbol{x}$ 的条件数学期望值 $y_{\mathrm{e}}$:

$$y_{\mathrm{e}}=E[y\mid\boldsymbol{x}]=\int_{-\infty}^{+\infty}yG(y/\boldsymbol{x})\mathrm{d}y=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}yG(\boldsymbol{x},y)\mathrm{d}y}{G(\boldsymbol{x})}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}yG(\boldsymbol{x},y)\mathrm{d}y}{\int_{-\infty}^{+\infty}G(\boldsymbol{x},y)\mathrm{d}y}. \tag{4}$$

进一步可求得 $G_{(J+1)c}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ y\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_{cx}\\ \mu_{cy}\end{bmatrix},\boldsymbol{\Sigma}_c\right)$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 的边沿概率密度函数 $G_{Jc}(\boldsymbol{x})$:

$$G_{Jc}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\dfrac{4F^3}{3V_D(\sigma^{cyy})^2},\ A^2-\sigma^{cyy}B+\sigma^{cyy}K^2\geqslant 0;\\ 0,\ \text{otherwise.}\end{cases}$$

其中:

$$F=(\sigma^{cyy}K^2-\sigma^{cyy}B+A^2)^{\frac{1}{2}};$$
$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_{cx})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}^{cxx}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_{cx})=B;$$
$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_{cx})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}^{cxy}=A.$$

因此,$G(\boldsymbol{x})=\sum_{c=1}^{C}p_cG_{Jc}(\boldsymbol{x})$.

可用数学归纳法证明当 $K=\sqrt{J+5}$ 时,$G_{Jc}(\boldsymbol{x})$ 是均值为 $\boldsymbol{\mu}_{cx}$、方差为 $\boldsymbol{\sigma}_{cxx}$ 的概率密度函数,可用蒙特卡洛方法求得 $V_D$.再进一步可求得:

$$\int_R yG_{(J+1)c}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ y\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_{cx}\\ \mu_{cy}\end{bmatrix},\boldsymbol{\Sigma}_c\right)\mathrm{d}y=\frac{4F^3}{3V_D(\sigma^{cyy})^2}\left(\mu_{cy}-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_{cx})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}^{cxy}}{\sigma^{cyy}}\right)$$

$(A^2-\sigma^{cyy}B+\sigma^{cyy}K^2\geqslant 0)$.

于是:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} yG(\boldsymbol{x},y)\mathrm{d}y=\sum_{c=1}^{C}p_cG_{J_c}(\boldsymbol{x})\left(\mu_{cy}-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_{cx})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}^{cxy}}{\sigma^{cyy}}\right).$$

所以式(4)变为

$$y_e=E[y\mid\boldsymbol{x}]=\int_{-\infty}^{+\infty}yG(y/\boldsymbol{x})\mathrm{d}y=\frac{\int_R yG(\boldsymbol{x},y)\mathrm{d}y}{G(\boldsymbol{x})}=\frac{\sum_{c=1}^{C}p_cG_{J_c}(\boldsymbol{x})\left(\mu_{cy}-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_{cx})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}^{cxy}}{\sigma^{cyy}}\right)}{\sum_{c'=1}^{C}p_{c'}G_{J_{c'}}(\boldsymbol{x})}. \quad (5)$$

当 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_J)^{\mathrm{T}}$ 和 $y$ 服从式(3)的混合分布时,比较式(5)和式(1)显然可得出如下定理:

**定理 1.** 如下列条件满足,则式(5)便转化成式(1):

1) EMM 的组件数等于 RCGFM 的规则数:$M=C$;

2) $J=D$;

3) EMM 的系数 $p_c$ 等于 RCCGLFM 相应规则的权值 $v_k$,即 $p_c=v_k(k=c)$;

4) RCCGLFM 规则后件的质心为

$$f_k(\boldsymbol{x})=\mu_{cy}-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_{cx})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}^{cxy}}{\sigma^{cyy}};$$

5) RCCGLFM 规则前件的隶属度函数 $\mu^k(\boldsymbol{x})$ 是相应的 $G_{J_c}(\boldsymbol{x})$,即 $\mu^k(\boldsymbol{x})=G_{J_c}(\boldsymbol{x})$.

利用定理 1,RCGFM 的规则可重新写为

$R^l$:IF $\boldsymbol{x}$ 是 $G_{Jl}(\boldsymbol{x})$,THEN $Y_l$ 是 $B^l(f^l(\boldsymbol{x})=\mu_{ly}-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_{lx})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}^{lxy}}{\sigma^{lyy}},v_l)(l=1,2,\cdots,M)$.

由定理 1 可知,如果任何一个有 $J$ 个相关的输入变量的多输入单输出系统的输入和输出服从式(3)所描述 Epanechnikov 混合分布,则一定会存在一个唯一确定的 RCGFM 与之对应. 这样,就可以利用多维 EMM 设计多输入单输出的 RCGFM.

### 1.4 EMM-RCGFM 的高度可解释性

我们设计的 EMM-RCGFM 具有高度的可解释性. EMM-RCGFM 每个规则后件的线性多项式恰好是 EMM-RCCGLFM 的输出在相应规则中心的一阶泰勒级数展开式. 而神经网络和其他模糊系统的参数失去了可解释性. 由于每个 $G_{Ji}(\boldsymbol{x})$ 都有以 $\boldsymbol{\mu}_{ix}$ $(i=1,\cdots,C)$ 为中心的紧支集,且在 $\boldsymbol{\mu}_{ix}$ 两侧迅速衰减,而 $\boldsymbol{\mu}_{ix}$ 为数据经过聚类后的聚类中心,因此我们总能得到一个合适的聚类数,使得 $G_{Ji}(\boldsymbol{\mu}_{jx})=0(j\neq i)$. 于是:

$$y_e\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}_{ix}}=\frac{\sum_{c=1}^{C}p_cG_{J_c}(\boldsymbol{x})\left(\mu_{cy}-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_{cx})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}^{cxy}}{\sigma^{cyy}}\right)}{\sum_{c'=1}^{C}p_{c'}G_{J_{c'}}(\boldsymbol{x})}\Big|_{\boldsymbol{x}=\mu_{ix}}=\frac{p_iG_{Ji}(\boldsymbol{x})}{p_iG_{Ji}(\boldsymbol{x})}\mu_{iy}=\mu_{iy}.$$

又可求得:$\frac{\mathrm{d}y_e}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\Big|_{\boldsymbol{x}=\mu_{ix}}=-\frac{1}{\sigma^{iyy}}\boldsymbol{\sigma}^{ixy}$.

所以,$y_e$ 在 $\boldsymbol{\mu}_{ix}$ 的一阶泰勒级数展开式为

$$y_e\xrightarrow{\text{Taylor}}y_e\Big|_{\boldsymbol{x}=\mu_{ix}}+\left(\frac{\mathrm{d}y_e}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\Big|_{\boldsymbol{x}=\mu_{ix}}\right)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_{ix})=\mu_{iy}-\frac{1}{\sigma^{iyy}}(\boldsymbol{\sigma}^{ixy})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_{ix}).$$

于是,有以下定理:

**定理 2.** EMM-RCGFM 每个规则后件的线性多项式恰好是 EMM-RCCGLFM 的输出在相应规则中心的一阶泰勒级数展开式.

## 2 仿真实验与分析

以下通过两个典型的数值实验,分别从逼近能力和鲁棒性及在边界点的效果 3 个方面来比较本文和文献[5]及文献[10]分别提出的 EMM-RCGFM 和 GMM-GFM 及 CC-TSKFS(cascaded centralized TSK fuzzy system)的性能,以验证 EMM-RCGFM 的可行性和有效性. 采用文献[10]的误差性能指标.

### 2.1 Mackey-Glass 混沌时间序列

本节用 EMM-RCGFM,GMM-GFM 和 CCTSKFS 对 Machey-Glass 混沌时间序列进行预测.

Mackey-Glass 混沌时间序列是时间序列预测问题中的 benchmark 问题之一[16]. Mackey-Glass 混沌时间序列方程为

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{0.2s(t-\tau)}{1+s^{10}(t-\tau)}-0.1s(t).$$

可用 Euler 方法将以上方程离散[16],其中 $\tau\geqslant 17$,因为 $\tau\geqslant 17$ 时,方程才表现出混沌特征[16]. 取 $h=1,\tau=17$, $s(0)=1.2$,当 $t<0$ 时,$s(0)=0$. 采用的输入和输出为 $\boldsymbol{x}=(s(t-18),s(t-12),s(t-6),s(t))$ 和 $y=s(t+6)$. 取 1 000 个点,用前 500 个点训练,后 500 个点测试,分有噪和无噪两种情况,有噪

情况加上 5% 的 Gaussian 白噪音,运行 10 次取平均. 实验数据的运行环境为 Dell Intel Pentium 1 800 MHz,256 MB DDR SDRAM,以下实验同.

由定理 1,可建立一个由 4 个模糊规则构成的多输入单输出的 EMM-RCGFM.

EMM-RCGFM, GMM-GFM 和 CCTSKFS 对 Machey-Glass 混沌时间序列的预测性能如表 1、表 2 所示:

**Table 1 Comparison of Approximation Performance**

**表 1 对 Mackey-Glass 时间序列的预测性能比较(不含噪音)**

| The Methods | Rule Number | Test Errors | Errors of Boundary |
|---|---|---|---|
| CCTSKFS | 283 | 0.035 648 | 0.005 376 |
| GMM-GFM | 4 | 0.005 1 | 0.000 7 |
| EMM-RCGFM | 4 | 0.004 3 | 0.000 6 |

**Table 2 Comparison of Approximation Performance**

**表 2 对 Mackey-Glass 时间序列的预测性能比较(含噪音)**

| The Methods | Rule Number | Test Errors | Errors of Boundary |
|---|---|---|---|
| CCTSKFS | 283 | 0.265 946 | 0.057 139 |
| GMM-GFM | 4 | 0.255 7 | 0.052 5 |
| EMM-RCGFM | 4 | 0.217 2 | 0.026 8 |

由表 1、表 2 可以看出,EMM-RCGFM 比 GMM-GFM 和 CCTSKFS 有更高的精度和更好的鲁棒性,在边界点处有更好的效果. 这和我们的分析一致. EMM-RCGFM 的速度比 GMM-GFM 快 3～4 倍,而比 CCTSKFS 则要快很多. 原因在于 EMM-RCGFM 和 GMM-GFM 的模糊规则很少,所以相差不大,而 CCTSKFS 的模糊规则很多.

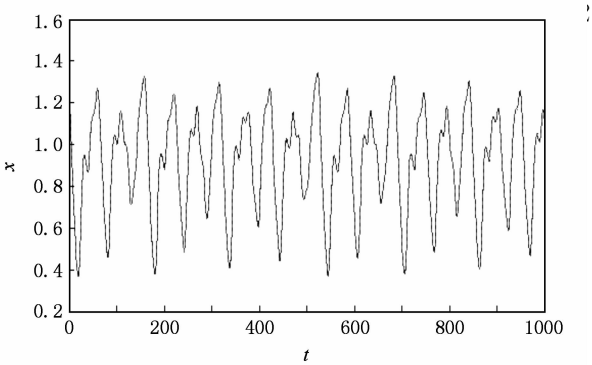



Fig. 1 Plot of target (solid line) and model output (dotted line) of the noise-free Mackey-Glass chaotic time series.

图 1 不含噪音的 Mackey-Glass 时间学列实际输出(实线)和模型输出(点线)

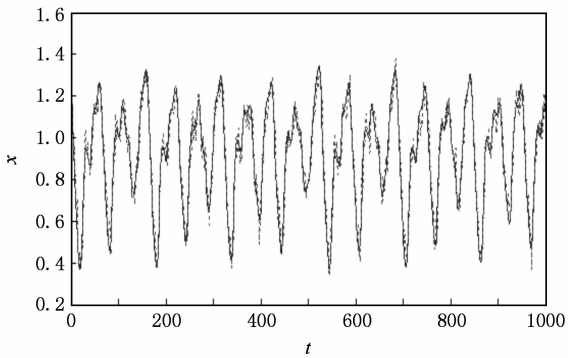



Fig. 2 Plot of target (solid line) and model output (dotted line) of the noise-corrupted Mackey-Glass chaotic time series.

图 2 含噪音的 Mackey-Glass 时间学列实际输出(实线)和模型输出(点线)

## 2.2 非线性动态系统识别

本节用 EMM-RCGFM, GMM-GFM 和 CCTSKFS 对一种非线性动态系统进行识别. 考虑文献[10]中非线性动态系统:

$$y(t+1)=\frac{y(t)y(t-1)y(t-2)x(t-1)(y(t-2)-1)+x(t)}{1+y^2(t-1)+y^2(t-2)},$$

其中 $x(t)$ 是均匀分布于区间[-2,2]上的随机信号,且当 $t<0$ 时,$x(t)=0$. 采用如下输入和输出:

$$\boldsymbol{x}=(y(t),y(t-1),y(t-2),x(t),x(t-1)),$$

$$y_o=y(t+1).$$

$y(t)$ 随机选取 3 个初值,$x(t)$ 随机选取 201 个值,将计算得到的 200 对 $(\boldsymbol{x},y_o)$ 用于训练. 分别用以下两种信号产生 800 个点用于测试. 分有噪和无噪两种情况,有噪情况加上 5% 的 Gaussian 白噪音,运行 10 次取平均,并且采用文献[10]的 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$.

EMM-RCGFM, GMM-GFM 和 CCTSKFS 对非线性动态系统的识别结果如表 3 至表 6 所示:

**Table 3 Comparison of Approximation Performance**

**表 3 对非线性动态系统的识别结果比较($x_1(t)$,不含噪音)**

| The Methods | Rule Number | Test Errors | Errors of Boundary |
|---|---|---|---|
| CCTSKFS | 270 | 0.121 950 | 0.061 294 |
| GMM-GFM | 4 | 0.026 4 | 0.010 5 |
| EMM-RCGFM | 4 | 0.022 1 | 0.008 9 |

**Table 4 Comparison of Approximation Performance**

**表 4 对非线性动态系统的识别结果比较($x_1(t)$,含噪音)**

| The Methods | Rule Number | Test Errors | Errors of Boundary |
|---|---|---|---|
| CCTSKFS | 270 | 0.227 339 | 0.124 397 |
| GMM-GFM | 4 | 0.069 0 | 0.032 4 |
| EMM-RCGFM | 4 | 0.058 1 | 0.027 0 |

**Table 5 Comparison of Approximation Performance**

**表 5 对非线性动态系统的识别结果比较($x_2(t)$,不含噪音)**

| The Methods | Rule Number | Test Errors | Errors of Boundary |
|---|---|---|---|
| CCTSKFS | 270 | 0.123 192 | 0.067 230 |
| GMM-GFM | 4 | 0.030 6 | 0.022 9 |
| EMM-RCGFM | 4 | 0.025 0 | 0.012 2 |

**Table 6 Comparison of Approximation Performance**

**表 6 对非线性动态系统的识别结果比较($x_2(t)$,含噪音)**

| The Methods | Rule Number | Test Errors | Errors of Boundary |
|---|---|---|---|
| CCTSKFS | 270 | 0.285 378 | 0.172 143 |
| GMM-GFM | 4 | 0.070 5 | 0.039 8 |
| EMM-RCGFM | 4 | 0.058 1 | 0.026 4 |

由 EMM-RCGFM 所得识别结果如图 3 至图 6 所示:

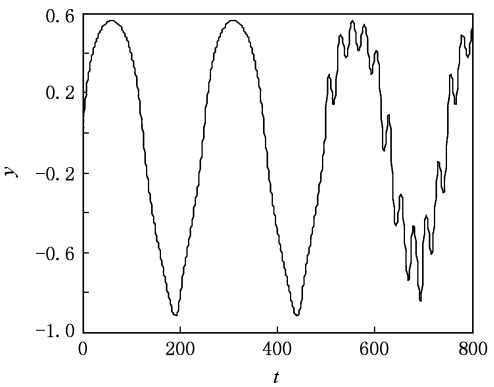



Fig. 3 Plot of target (solid line) and model output (dotted line) of the noise-free nonlinear dynamic system with input 1.

图 3 不含噪音且使用第 1 个输入的非线性动态系统的实际输出(实线)和模型输出(点线)

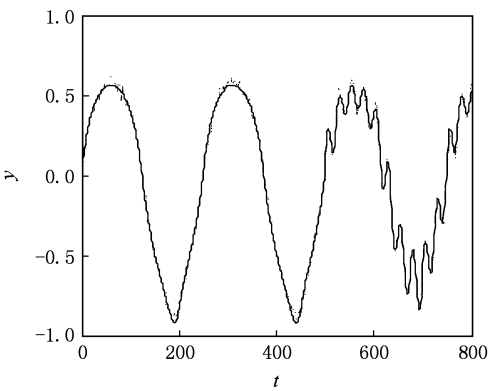



Fig. 4 Plot of target (solid line) and model output (dotted line) of the noise-corrupted nonlinear dynamic system with input 1.

图 4 含噪音且使用第 1 个输入的非线性动态系统的实际输出(实线)和模型输出(点线)

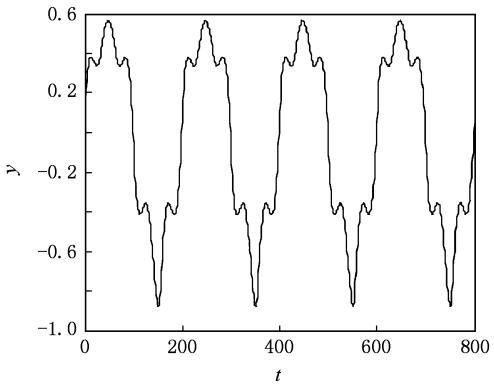



Fig. 5 Plot of target (solid line) and model output (dotted line) of the noise-free nonlinear dynamic system with input 2.

图 5 不含噪音且使用第 2 个输入的非线性动态系统的实际输出(实线)和模型输出(点线)

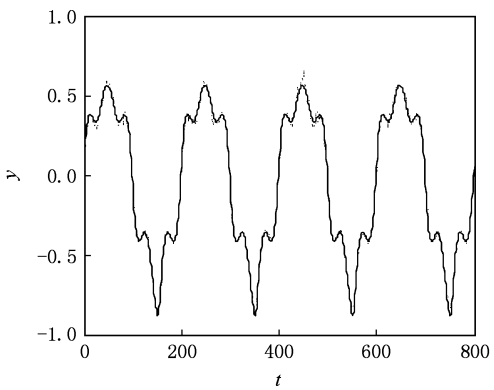



Fig. 6 Plot of target (solid line) and model output (dotted line) of the noise-corrupted nonlinear dynamic system with input 2.

图 6 含噪音且使用第 2 个输入的非线性动态系统的实际输出(实线)和模型输出(点线)

由以上两个例子的实验数据可以看出:EMM-RCGFM 和 GMM-GFM 仅需要很少的模糊规则就能到达很高的精度,而 CCTSKFS 则需要很多的模糊规则;EMM-RCGFM 和 GMM-GFM 的性能差距不大,但 EMM-RCGFM 具有高度的可解释性.经过实验发现:EMM-RCGFM 和 GMM-GFM 的精度随着模糊规则数的增加而增加,并且 EMM-RCGFM 和 GMM-GFM 的性能差距也随之拉大,如速度、精度及鲁棒性,EMM-RCGFM 越来越显示出其优越性.计算 EMM-RCGFM 和 GMM-GFM 测试误差比:

$\frac{0.0051}{0.0043}<\frac{0.0264}{0.0221}$ 或 $\frac{0.0306}{0.0250}$(不含噪音,含噪音的也一样)

可见 EMM-RCGFM 和 GMM-GFM 对第 2 个实验的性能差距更大. 原因在于第 2 个实验的方差比第 1 个实验的大,而 Epanechnikov 核函数对核的宽度不敏感.

## 3 结 论

一种新的规则中心化的广义模糊模型(EMM-RCGFM)被建立. EMM-RCGFM 具有高度的可解释性,模型的后件质心恰好是模型输出在相应均值的一阶 Taylor 展开式,这是其他模糊系统所不具有的; EMM-RCGFM 还考虑了输入数据的相关性,更符合现实情况;此外,Epanechnikov 隶属度函数是具有紧支集的多项式函数,具有很好的全局性质和很强的外推能力. 因此,EMM-RCGFM 规则数少、精度高、鲁棒性好,尤其可降低边界效应. 这些在数值实验中得到了验证.

**致谢** 在此,我们向对本文的工作给予支持和建议的同学和老师表示感谢!

## 参 考 文 献

[1] Zadeh L A. Probability theory and fuzzy logic are complementary rather than competitive [J]. Technometrics, 1995, 37(3): 271-276

[2] Dubois D, Prade H. Fuzzy sets and probability: Misunderstandings, bridges, and gaps [C] //Proc of 2nd IEEE Int Conf Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE'93). Piscataway, NJ: IEEE, 1993: 1059-1068

[3] Mendel J M. Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions [M]. New York: Prentice Hall, 2000

[4] Zhu Lin, Wang Shitong, Deng Zhaohong. Research on generalized fuzzy C-means clustering algorithm with improved fuzzy partitions [J]. Journal of Computer Research and Development, 2009, 46(5): 814-822 (in Chinese)
(朱林, 王士同, 邓赵红. 改进模糊划分的 FCM 聚类算法的一般化研究[J]. 计算机研究与发展, 2009, 46(5): 814-822)

[5] Gan Mingtao, Hanmandlu Madasu. From a Gaussian mixture model to additive fuzzy systems [J]. IEEE Trans on Fuzzy System, 2005, 13(3): 303-316

[6] Verma N K, Hanmandlu M. From a Gaussian mixture model to non-additive fuzzy systems [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2007, 15(2): 1-19

[7] Kim E, Park M, Seungwoo K, et al. A tansformed input-domain approach to fuzzy moeling [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1998, 4(6): 596-604

[8] Kroll A. Identification of functioanal fuzzy models using multidimensional reference fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 80(22): 149-158

[9] Abonyi J, Babuska R, Szeifert F. Fuzzy modelling with multivariate membership functions: Gray-box identification and control design [J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, 2001, 31(5): 755-767

[10] Wang Shitong, Chung F L, Shen Hongbin, et al. Cascaded centralized TSK fuzzy system: universal approximator and high interpretation [J]. Applied Soft Computing, 2005, 5(2): 131-145

[11] Kollios G, Gunopulos D, Koudas N, et al. Efficient biased sampling for approximate clustering and outlier detection in large data sets [J]. IEEE Trans on Knowledge and Data Engineering, 2003, 15(5): 1170-1187

[12] Jenssen R. Indefinite Parzen window for spectral clustering [C] //Proc of IEEE Workshop on Machine Learning for Signal Processing. Piscataway, NJ: IEEE, 2007: 390-395

[13] Wand M P, Jones M C. Kernel Smoothing [M]. London: Chapman and Hall, 1995

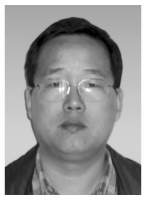
[14] Azeem M F, Hanmandlu M, Ahmad N.. Generalization of adaptive neuro-fuzzy inference systems [J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2000, 11(6): 1332-1346

[15] Guo Qingchang, Chang Xiaojuan, Chu Hongxia. Mean-shift of variable window based on the epanechnikov kernel [C] // Proc of IEEE Int Conf on Mechatronnics and Automation. Piscataway, NJ: IEEE, 2007: 2314-2319

[16] Chudy L, Farkas I. Prediction of chaotic time-series using dynamic cell structures and local linear models [J]. Neural Network World, 1998, 8(5): 481-489

**Zhang Qinli**, born in 1972. PhD, associate professor of the North China Institute of Aerospace Engineering since 2006. His main research interests include pattern recognition, fuzzy system, and wavelet analysis.

**张钦礼**,1972 年生,博士,副教授,主要研究方向为模式识别、模糊系统和小波分析等.



**Wang Shitong**, born in 1964. Full professor and PhD supervisor with the School of Information, Jiangnan University. His main research interests include artificial intelligence, neural networks, fuzzy system, and pattern recognition.

**王士同**,1964 年生,教授,博士生导师,主要研究方向为人工智能、神经网络、模式识别和模糊系统等.

**Research Background**

Fuzzy models, including Takagi Sugeno fuzzy model and Mamdani model, have found application in a huge range of problem domains, such as pattern recognition, economics, data analysis, and other areas that involve a high level of uncertainty, complexity, or nonlinearity. This paper presents the formulation of rule-centered generalized fuzzy model (RCGFM) with high interpretability by using the framework of the Epanechnikov mixture model, which provides the multi-dimensional membership functions for the input fuzzy sets. The novel method of training fuzzy model is very effective and efficient. Its effectiveness and efficiency are demonstrated by two benchmark examples: Mackey-Glass chaotic time series and a nonlinear dynamic system. This work is supported by the National Natural Science Foundation of China (60773206/F020106, 60704047/030304) and the National High-Tech Research and Development Plan of China (2007AA1Z158, 2006AA10Z313).


# 《计算机光盘软件与应用》杂志简介

《计算机光盘软件与应用》杂志是由中国科学院主管、大恒电子出版社主办的国内外公开发行的综合性国家级学术期刊. 中国学术期刊(光盘版)全文收录期刊、中国核心期刊(遴选)数据库全文收录期刊、中文科技期刊数据库全文收录期刊.

国际标准刊号:ISSN 1007-9599

国内统一刊号:CN 11-3907/TP

邮发代号:82-271

**栏目设置**

1. 软件设计开发:软件工程,程序设计,基于计算机、电子、自动化各领域的理论与应用研究;
2. 信息技术应用研究:
3. 工程技术:网络与通信技术、信息安全技术、开发研究与设计技术、人工智能及识别技术;
4. 多媒体技术及应用:远程教育、多媒体教学、网络教研;
5. 计算机教学与教育信息化:计算机化教学,计算机教学应用研究;
6. 科技创新.

**征稿对象**

从事计算机、电子、通讯、教育方面学习或工作的人员均可向本刊投稿.

**编辑地址**:北京市丰台区方庄太阳天地商务会馆 6 层 **邮编**:100078

**联 系 人**:彭西宁 **电话**:010-67217131

**邮 箱**:JSJGPRJYYYZZS@126.COM

(JSJGPRJYYYZZS 为"计算机光盘软件与应用杂志社"首字母).