

复杂网络的影响可控性

刘志宏 曾勇 吴宏亮 马建峰

(西安电子科技大学计算机学院 西安 710071)

(liuzhihong@mail.xidian.edu.cn)

Controlling Complex Networks via Influence

Liu Zhihong, Zeng Yong, Wu Hongliang, and Ma Jianfeng

(School of Computer Science and Technology, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract Human behavior is profoundly affected by individuals and the social network that links them together. We base our study on the important model of influence network largely due to DeGroot. In this model, the social structure of a society is described by a weighted and possibly directed network. Each node in the network takes an initial position about a common question of interest. At each date, nodes communicate with each other in the social network and update their positions because of the influences from neighbors. This paper presents a framework to analyze the controllability of social complex networks via influence. We show how the opinion, or attitude about some common questions can be controlled by a subset of committed nodes who consistently proselytize the opposing opinion and are immune to influence. Some controllable criteria are established to guarantee that a network can be fully or partially controllable. Besides, the methods to control an influence network are proposed. Because structural controllability has been proposed as an analytical framework for making predictions regarding the control of complex networks in the physical and life sciences, the relationship between influence controllability and structural controllability of networks is also presented.

Key words complex network; controllability; influence; social network; DeGroot model

摘要 人们的行为受其他个体和连接彼此的社会网络的影响,研究基于影响网络的重要模型(DeGroot模型),在此模型中,社会网络可用一个加权的有向图表示,网络中的每个个体对某个共同的兴趣问题具有一个初始态度,由于网络中节点的相互影响而会逐步发生改变,提出一种框架用于分析复杂社会网络的影响可控性,结果表明,如果网络中存在持相反观点且对影响免疫的个体,群体对于命题的观点或态度可被固执的个体集合控制,通过分析网络完全影响可控或部分影响可控的条件,得到相应的可控准则,此外,提出控制影响网络的具体方法,由于网络的结构可控性已被广泛用于分析各种复杂网络,分析了网络的影响可控性与结构可控性的关系。

关键词 复杂网络;可控性;影响;社会网络;DeGroot模型

中图法分类号 TP393

复杂网络已得到越来越多的关注,来自物理、生物、社会学、计算机等多个学科的学者对复杂网络进

行了深入研究,许多自然界的系统可以运用复杂网络的模型加以描述^[1-3]。

收稿日期:2013-07-22;修回日期:2013-10-30

基金项目:长江学者和创新团队发展计划基金项目(IRT1078);国家自然科学基金项目(61173135,61100235,61100230,61100233,61202390,61202389);陕西省自然科学基金基础研究计划基金项目(2011JM8004)

社会网络是一种复杂网络,指社会个体成员之间因为相互关系和影响而形成的网络.社会网络作为信息传播的媒介,在社会成员之间扮演着重要角色.人们的行为受个体和连接他们的社会网络影响,网络中每个节点对某个命题的初始态度会随着时间的推移,由朋友或邻居的影响而发生动态变化.

本文的研究基于网络影响传播的一个重要模型——DeGroot 模型^[4].在此模型中,社会结构用加权有向网络描述,网络中每个节点对于设定的命题有一个初始态度.相邻节点之间相互交流,更新态度.更新规则是:节点新的态度值为上一时刻其邻居节点态度值的加权平均.随着时间的推移,在一定的条件下,节点的态度值最终可能收敛到一个共识(*consensus*).本文的主要目的在于研究个体行为对社会网络的影响,研究在何种条件下,网络的最终结果或群体共识是可控的.

在社会网络和计算机科学领域中,关于 DeGroot 及其演变模型^[5]有诸多文献.然而,他们关注的是网络共识^[6-7]而非可控性.关于共识和社会学习^[8-10]有许多理论文献,而本文的研究内容和结果与他们有较大不同.与学习模型相比,本文通过分析网络收敛性和共识来寻找引导网络到达所需状态的方法.文献^[11-12]的工作和本文的主要思想相近,但他们的模型和结论与本文不同.文献^[11]基于控制和图论研究了网络的可控性;而文献^[12]采用牵制控制的策略对部分节点施加控制,驱使网络从任意初始状态到达所需的目标状态.然而,对于具有任意拓扑结构的网络,如何有效地选择其牵制节点仍是一个开放问题.

本文主要有 2 个贡献:1)提出了影响网络完全或部分可控的条件;2)提出了控制影响网络的基本方法,并简要对比分析了复杂网络的影响可控性与结构可控性.

1 预备知识

1.1 影响网络

影响网络^[13]是一个有向网络 $G(N, E)$,其中 N 为 n 个节点集合, E 为有向加权链路集合.节点的属性值定义为与命题相关的态度值 (*position*),而链

路的权值定义为节点影响力的大小. $s(t) = (s_1(t), \dots, s_n(t))$ 是网络节点的态度值矢量,其中 $s_i(t) \in [-1, +1]$ 表示节点 i 在时刻 t 的态度值.链路 $e: v \rightarrow u$ 的权值定义了节点 v 对节点 u 态度值的影响力 ϕ_{vu} ,其范围为 $0 \leq \phi_{vu} \leq 1$,“0”表示无影响而“1”表示 100% 影响(完全控制).对任意网络节点而言,所有邻居节点对其施加的影响力权值之和小于等于 1.

影响网络可以模拟社会、经济及政策的决策过程,预测社会成员之间协商的可能结果,确定网络节点的重要程度.

1.2 影响矩阵

在影响网络中,节点态度值的变化率是由邻接节点之间态度值的差异决定的,即节点 i 在时刻 $t+1$ 的态度值为

$$s_i(t+1) = s_i(t) + \sum_{j=1}^n [s_j(t) - s_i(t)] (\phi^T)_{ij},$$

其中, $s_i(t)$ 为节点 i 在时刻 t 的态度值,矩阵 $\phi = (\phi_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 由网络拓扑及链路上的影响权值构成, ϕ^T 为其转置.

如果节点 i 受到多个相邻节点的影响,那么将来状态的变化就是作用于 i 上的所有影响的总和:

$$\Delta s_i(t) = \sum_{j=1}^n [\phi_{ji} (s_j(t) - s_i(t))].$$

状态方程的矩阵形式可表示为 $\Delta s(t) = L \cdot s(t)$,其中 L 是 ϕ^T 的拉普拉斯矩阵^①.因此,更新规则为

$$s(t+1) = s(t) + L \cdot s(t) = (I + L)s(t),$$

即

$$s(t) = (I + L)^t s(0).$$

影响模式通过矩阵 $T = I + L = (T_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 来表示,其中 T_{ij} 表示节点 i 受节点 j 影响.本文将矩阵 T 定义为网络的影响矩阵.显然,该矩阵是一个随机矩阵,每行元素的和为 1.

1.3 DeGroot 模型

影响网络中节点的态度值依赖于邻居的加权平均,态度值的更新规则也可以用 DeGroot 模型进行描述. DeGroot 在 French^[14] 和 Harary^[15] 研究的基础上提出了通用的 DeGroot 模型,该模型对信息传播、观点形成和共识达成等网络交互进行了刻画.

在 DeGroot 模型中,节点的交互作用由 $n \times n$ 的

① 一个随机矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的拉普拉斯矩阵可表示为 $L(A) = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$,矩阵 $L(A)$ 中的每行元素之和为 0,即如果 $i = j$,则 $l_{ij} = 1 -$

$\sum_{i=1}^n a_{ij}$,否则 $l_{ij} = a_{ij}$.

随机矩阵 $T=(T_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示, 其中 $T_{ij} > 0$ 表示节点 i 受节点 j 的影响程度. 节点通过计算其邻居节点态度值的加权平均来更新自己的态度值, 其中 T_{ij} 为节点 i 对节点 j 当前态度值的权重. 每个节点在时刻 t 的态度值为 $p_i^{(t)} \in \mathbb{R}, 0 \leq p_i^{(t)} \leq 1$. 更新规则为

$$p^{(t)} = T \cdot p^{(t-1)}.$$

所以:

$$p^{(t)} = T^t \cdot p^{(0)}.$$

矩阵 T 为一个 $n \times n$ 的随机矩阵, 可以看成是一个 Markov 链的一步转移概率矩阵. 由 Markov 链的极限定理可知, 不可约和无周期的有限状态 Markov 链具有稳态分布. 因此, 如果网络是强连通且非周期, 节点的态度值将收敛到同一共识^[4].

1.4 闭集

在非强连通有向图中存在最大的强连通子图 (strongly connected component, SCC). 如果一个 SCC 没有外出的有向边, 则称此 SCC 为 sink SCC. 同理, 如果一个 SCC 没有进入的有向边, 则称之为 source SCC. 此外, 在一个 Markov 链中, 如果一个节点集合没有外出的边, 则称此集合为一个闭集 (closed set)^[16]. 在本文中, 如果一个 Markov 链中的状态节点集合称为闭集, 则是指最小闭集, 且是强连通的. 显然, 一个 sink SCC 同样是一个强连通的闭集.

在一个影响网络中, 如图 1(a) 所示, 有向边 $i \rightarrow j$ 表明节点 i 对节点 j 有影响, ϕ_{ij} 是节点 i 对 j 的影响权重. 给定网络的影响矩阵 $T=(T_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, T 可看成一个 Markov 链的一步转移概率矩阵. 在影响网络对应的 Markov 链中, 如图 1(c) 是图 1(a) 对应的 Markov 链, 边的方向与影响网络中边的方向相反, 有向边 $i \rightarrow j$ 表示节点 i 受节点 j 影响^[17].

2 影响可控性

在影响网络中, 节点 i 的初始态度值 $s_i(0)$ 在 -1

和 1 之间. 随着时间的推移, 受邻居的影响, 节点的态度值可能发生改变. 直观上, 可以通过控制一部分节点来引导网络达到期望的状态. 本文将通过影响改变其他节点的态度值而自己却对影响免疫的节点称作外部控制器. 假设外部控制器的初始态度值为 +1, 我们希望网络中所有其他节点的最终态度值为 +1 或接近 +1. 在外部控制器的控制下, 如果所有节点的最终态度都与外部控制器相同, 则称此网络是完全影响可控; 如果所有节点的最终态度值都为正, 则称网络是部分影响可控. 由外部控制器直接控制的节点称为驱动节点. 在图 1(a) 中, 节点 1 是一个外部控制器, 它通过影响节点 2 来达到影响整个网络的目的, 此时, 节点 2 称为驱动节点.

2.1 完全影响可控

2.1.1 完全影响可控的结构条件

定义 1. 如果网络中所有节点的态度值都收敛到与外部控制器的态度值相同, 那么称该网络完全影响可控.

定理 1. 在一个影响网络 $G(N, E)$ 中, 给定驱动节点集合 $D \subset N$, 如果对于所有节点 $i \in N \setminus D$, 都存在一条从集合 D 中的节点到 i 的有向路径, 则网络是完全影响可控.

证明. 假设节点 1 为外部控制器, 则节点 1 到集合 D 中的所有节点都存在有向边. 如果所有节点 $i \in N \setminus D$ 都存在一条从某个驱动节点到节点 i 的路径, 则外部控制器可以到达网络中的每一个节点. 由于网络的影响矩阵 T 是一个 $n \times n$ 非负随机矩阵, 此矩阵可以看作一个 Markov 链的一步转移概率矩阵. 例如与图 1(a) 中影响网络的影响矩阵 T 对应的 Markov 链如图 1(c) 所示, 其中外部控制器 (节点 1) 为吸收态. 由于从节点 1 到影响网络的其他所有节点都存在一条有向路径, 则在对应的 Markov 链中, 其他节点都有一条到节点 1 (吸收态) 的有向路径. 因此, 任意状态 i 到达吸收态 1 的概率 $p_{i1}^{(n)} > 0$, 此 Markov 链是一个吸收链. 经过有限的时间步骤之

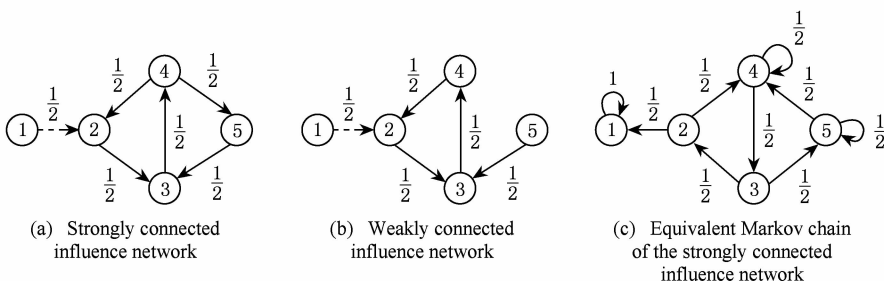


Fig. 1 Influence network and the equivalent Markov chain.

图 1 影响网络及其对应的 Markov 链

后,每一个暂态 i 最终将会收敛到吸收状态 1. 因此,节点的状态将会和外部控制器(节点 1)的相同.

证毕.

定理 1 的直观解释是:如果存在外部控制器不可到达的节点,则这些节点将不受外部控制器影响,此影响网络不可控. 例如在图 1(b)中,驱动节点 2 不能到达节点 5,矩阵 T 代表 Markov 链包含 2 个吸收状态:状态 1 和状态 5. 该 Markov 链的状态空间可分为 3 类,即 $\{1\}$, $\{2,3,4\}$ 和 $\{5\}$. 第 1 类和第 3 类为吸收态,而第 2 类是暂态. 经过有限时间步骤之后,该链将以一定的概率到达状态 1 或状态 5. 因此网络将不能达到共识并完全影响可控.

2.1.2 驱动节点的选择

如果需要对影响网络进行控制,首先需要确定驱动节点的集合,然后对其施加正面或负面的影响. 定理 2 为寻找驱动节点提供了一种简便方法.

定理 2. 在网络 G 为强连通的情况下,实现完全影响控制所需驱动节点的最小值为 1;在网络为弱连通的情况下,实现完全影响控制所需驱动节点的最小值等于影响网络对应的 Markov 链包含的最小闭集的数目.

证明. 在网络 G 为强连通的情况下, G 中任意节点到其他任何节点都存在一条有向路径. 由定理 1 可知,任意选择一个节点作为驱动节点就可以对网络 G 进行完全影响控制.

在网络 G 为弱连通的情况下,给定网络的影响矩阵 T ,如果把 T 看成一个 Markov 链的一步转移概率矩阵,则网络节点可分成闭集 C_1, \dots, C_k 和不在任意闭集中的节点集. 如果网络中只存在一个闭集,根据 Markov 链中闭集的定义,闭集外的任意节点都有一条到达闭集的路径. 如果闭集中某个节点受到外部控制器的直接影响,则在影响网络对应的 Markov 链中,每个节点都能到达外部控制器. 由定理 1 可知,此影响网络完全影响可控. 如果网络对应的 Markov 链中存在多个闭集,在每个闭集中任选一个驱动节点,则每个节点都存在能到达外部驱动器的有向路径,此 Markov 链转变成只有一个吸收态的吸收链,所有节点的态度值会收敛到一个共识,即外部控制器的态度值.

证毕.

例如给定一个影响网络 $G(N, E)$, $N = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 如图 2(a)所示,外部控制器(节点 1)通过驱动节点 2 和节点 5 对网络施加影响. 图 2(b)是 $G(N, E)$ 对应的 Markov 链,其中存在 2 个闭集 $C_1 = \{2\}$ 和 $C_2 = \{5, 6, 7\}$. 外部控制器通过在每个闭集中任

选一个节点作为驱动节点来完全控制网络动态.

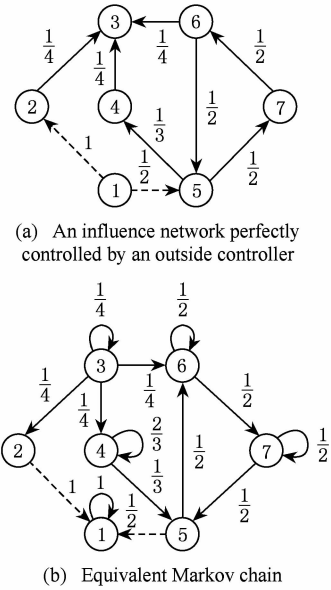


Fig. 2 Controlling an influence network.

图 2 影响网络的控制

在一个强连通影响网络 G 或一个闭集 C_i 中,任何一个节点都可选作驱动节点. 然而,不同节点在网络中的影响力不同. 在态度值收敛的情况下,网络的最终态度值为所有节点初始态度值的加权平均值. 令 $s = \{s_i\}$ 为节点的影响权值或影响力. 给定一个影响矩阵 T ,计算 s 的一种简单方法为重复计算 T 并找到其极限,也可以通过直接计算 $s \cdot T = s$ 而得到. 如图 3(a)所示的影响网络,图 3(d)是其收敛所需的更新轮数. 图 3(e)是当外部控制器(节点 6)对网络进行影响控制时收敛所需的更新轮数(当节点 6 对节点 2 的影响权值 $T_{26} = 1/4$ 时,外部控制器的态度值设置为 +1;当 $T_{26} = 3/4$ 时,外部控制器的态度值设置为 -1). 如果外部控制器(节点 6)选择节点 3 作为驱动节点,如图 3(c)所示,收敛所需的更新轮数如图 3(f)所示(当 $T_{36} = 1/4$ 时,外部控制器的态度值设置为 +1. 当 $T_{36} = 3/4$ 时,外部控制器的态度值设置为 -1). 对于图 3(a)所示的影响网络,通过计算可得此影响网络的影响权值为 $s = (0.2667, 0.1778, 0.3556, 0.1333, 0.0667)$,表明节点 3 具有最大的影响力. 比较图 3(e)和图 3(f)的结果可以看出,驱动节点的影响力越大网络收敛的速度越快. 因此选择影响力大的节点作为驱动节点可以加快网络的收敛速度.

理论上,外部控制器对驱动节点的影响权值可以任意小. 然而,如果该驱动节点得到比较大的影响权值,其影响能力将更强,网络收敛速度将更快,如图 3(e)所示.

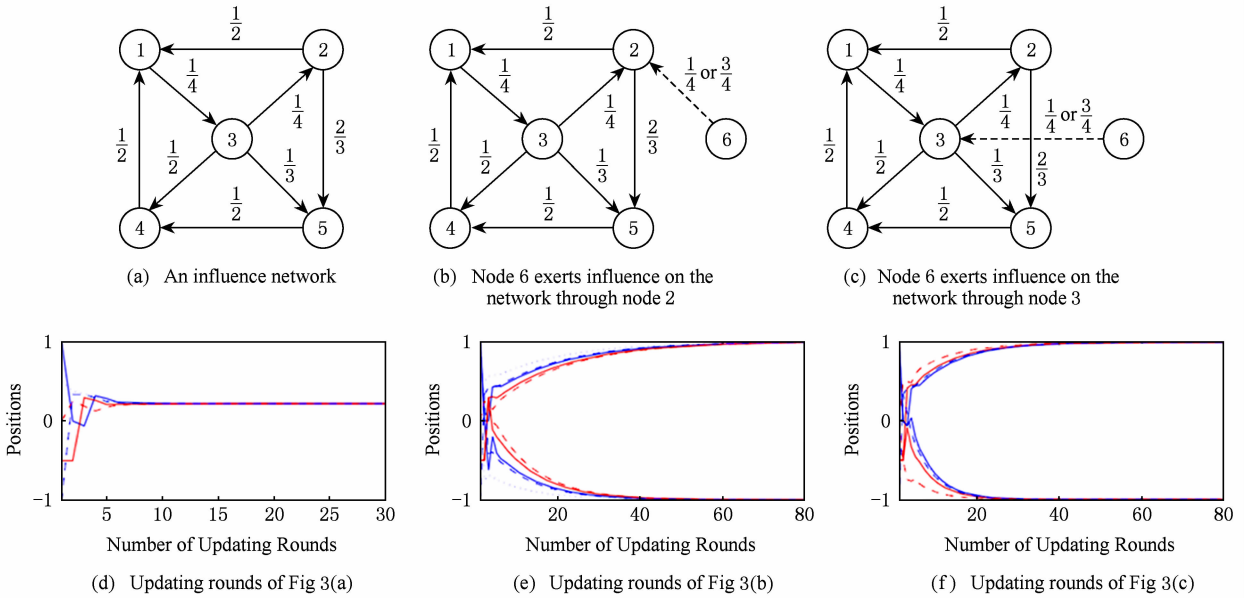


Fig. 3 Speed of convergence.

图 3 收敛速度

2.2 部分影响可控

2.2.1 部分影响可控的结构条件

第 2.1 节的分析假设网络的任意一个节点都可以被外部控制器直接影响,但现实社会网络充满着冲突.如图 1(b)所示,假设节点 1(外部控制器)能直接影响节点 2,然而节点 1 的影响无法到达态度为 -1 的节点 5,即节点 5 不受节点 1 的影响控制.因此,正面和负面的影响将导致冲突,冲突将阻止网络到达共识.

定义 2. 给定一个影响网络 $G(N, E)$ 和驱动节点集合 $D \subset N$, 外部控制器的态度值为 +1. 集合 $U \subset N \setminus D$ 包含 u 个不可控的节点, 态度值设置为 -1. 对于任意一个节点 $i \in N \setminus U$, 无论其初始态度为何值, 如果其最终态度值为正, 则称该网络为部分影响可控.

由定义 2 可知, 影响网络要实现部分影响可控, 不仅需要确保影响矩阵 T 收敛, 而且需要确保节点的最终态度为正.

考虑一个影响网络 G , 其对应的 Markov 链包含闭集 C_1, \dots, C_k 和不属于闭集中的节点. 如果闭集 C_i 中至少存在一个驱动节点 $j \in D$ 能够被外部控制器影响, 则该闭集是可控的. 根据定理 2, 闭集 C_i 中的节点将收敛到一个共识. 然而, 如果闭集中的所有节点对于外部控制器的影响都免疫, 则该闭集不能被控制.

如图 4(a)所示的影响网络, 设 C_1, C_2, C_3 和 C_4 是 source SCC, 则 C_1, C_2, C_3 和 C_4 在对应的 Markov

链中是 4 个闭集. 如果闭集 C_1 和 C_2 直接与外部控制器(节点 1)相连, 闭集 C_1 和 C_2 是可控的, 闭集 C_1 和 C_2 中的所有节点收敛到一个共识态度值 +1, 其他 2 个闭集 C_3 和 C_4 不是可控的. 设闭集 C_3 和 C_4 中节点的态度值 -1. 为了表述简便, 我们将可控闭集中的节点作为外部控制器, 标记为节点 1, 把不可控闭集中的节点当作不可控制源节点, 标记为节点 n . 因此, 网络的影响矩阵 T 可以表示为含有 2 个吸收状态的 Markov 链, 即状态 1 和状态 n , 其对应的影响网络如图 4(b)所示.

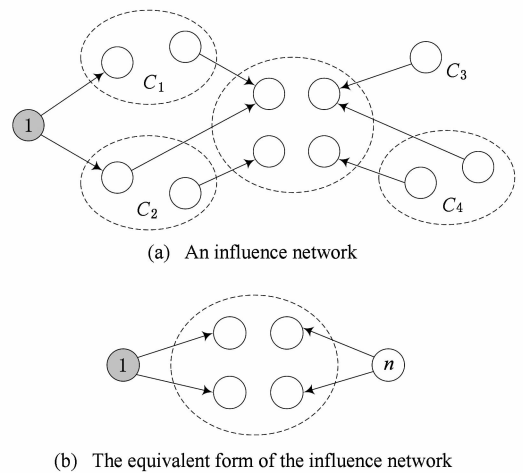


Fig. 4 Influence network and its equivalent model.

图 4 影响网络及其等价模型

对于影响网络 $G(N, E)$, 包含一个外部控制器和一个不可控的源节点(态度值设置为 -1), 如图 4(b)所示. 网络 G 的影响矩阵 T 可以表示成如下形式:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

其中, \mathbf{A} 和 \mathbf{C} 为 $(n-2) \times 1$ 的子矩阵, \mathbf{B} 为 $(n-2) \times (n-2)$ 的子矩阵. 直观上, 子矩阵 $\mathbf{A} = (a_{21}, a_{31}, \dots, a_{(n-1),1})^T$ 代表网络中外部控制器对用户节点的影响力; 子矩阵 $\mathbf{C} = (c_{2n}, c_{3n}, \dots, c_{(n-1),n})^T$ 代表不受控制的源节点对用户节点的影响力; 子矩阵 \mathbf{B} 的元素 b_{ij} 代表用户节点 j 对节点 i 的影响力.

为了实现部分影响可控, 首先要使影响矩阵 T 收敛. 定理 3 给出了矩阵收敛所需满足的条件.

定理 3. 随机矩阵 T 是收敛的, 当且仅当每一个强连通闭集是非周期性^[5].

对于如图 4(b) 所示网络 G , 由其影响矩阵 T 对应的 Markov 链可知, 每个节点都以正的概率到达 2 个吸收状态之一, 即闭集 $\{1\}$ 和闭集 $\{n\}$. 由于 $T_{11} = T_{nn} = 1$, 这 2 个闭集是强连通且非周期性, 由定理 3 可知该矩阵是收敛的.

在已知态度值收敛的情况下, 接下来需要确定收敛的状态值.

引理 1. 给定一个亚随机矩阵 (substochastic matrix), $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 即 $b_{ij} \in [0, 1]$, 且 $0 \leq \sum_{j=1}^n b_{ij} \leq 1 (i=1, \dots, n)$. 设集合 S_1 表示行和小于 1 的行, 集合 S_2 表示行和为 1 的行, 即 $\forall i \in S_1, 0 \leq \sum_{j=1}^n b_{ij} < 1$, 而 $\forall i \in S_2, \sum_{j=1}^n b_{ij} = 1$, 且 $|S_1| + |S_2| = n$. 如果把矩阵 \mathbf{B} 看成一个有向图的邻接矩阵 ($b_{ij} > 0$ 表示存在一条从 i 到 j 的有向边, 否则不存在有向边), 且在这个有向图中, 集合 S_2 中的任意节点都能到达集合 S_1 中的节点, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时 $\mathbf{B}^t \rightarrow \mathbf{0}$.

证明. 引理 1 的证明见附录 A.

影响网络 G 可能达不到同一共识, 但可达到一个由 $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k$ 确定的稳定状态.

$$T^k = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{A}^{(k)} & \mathbf{B}^{(k)} & \mathbf{C}^{(k)} \\ 0 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

其中, $\mathbf{A}^{(k)} = (\mathbf{I} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 + \dots + \mathbf{B}^{k-1})\mathbf{A}$, $\mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{B}^k$, $\mathbf{C}^{(k)} = (\mathbf{I} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 + \dots + \mathbf{B}^{k-1})\mathbf{C}$, \mathbf{I} 为 $(n-2) \times (n-2)$ 的单位矩阵.

由于影响矩阵 T 是一个随机矩阵 (每一行的元素之和为 1), \mathbf{A} 和 \mathbf{C} 至少含有一个非零元素, 子矩阵 \mathbf{B} 每一行元素之和小于等于 1, 并且至少有一行元素之和小于 1. 由于每个节点都能到达外部控制

器 (节点 1) 或者不可控的源节点 (节点 n), 由引理 1 可知:

$$\mathbf{B}^{(\infty)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{B}^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{B}^k = \mathbf{0},$$

且:

$$T^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} T^k = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{A}^{(\infty)} & \mathbf{0} & \mathbf{C}^{(\infty)} \\ 0 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

是幂等的, 其中:

$$\mathbf{A}^{(\infty)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{I} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 + \dots + \mathbf{B}^{k-1})\mathbf{A},$$

$$\mathbf{C}^{(\infty)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{C}^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{I} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 + \dots + \mathbf{B}^{k-1})\mathbf{C}.$$

因为当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{B}^t \rightarrow \mathbf{0}$, 所以可得:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 + \dots + \mathbf{B}^k + \dots,$$

且:

$$\mathbf{A}^{(\infty)} = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A},$$

$$\mathbf{C}^{(\infty)} = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}.$$

对网络 $G(N, E)$ 实施部分影响控制, 必须满足条件: $\mathbf{A}^{(\infty)} > \mathbf{C}^{(\infty)}$. 所以, 网络部分影响可控所需要满足的条件为

$$\mathbf{A}^{(\infty)} - \mathbf{C}^{(\infty)} = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{C}) > \mathbf{0}.$$

综上所述, 可得以下结论.

定理 4. 对于影响网络 $G(N, E)$, 给定其影响矩阵:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

如果:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{C}) > \mathbf{0},$$

则该网络部分影响可控.

2.2.2 驱动节点的选择

如果一个影响网络是强连通, 可以选取网络中的任意节点作为驱动节点. 如果网络中存在不可控节点, 则需要综合考虑.

定义 3. 给定一个影响网络 G 以及它的影响矩阵 $T = (T_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 如果 $T_{ki} > T_{kj}, k=1, 2, \dots, n$, 则称节点 i 的影响力比节点 j 强.

由定理 4 可知, 如果外部控制器的影响力比不可控节点强, 即 $\mathbf{A} > \mathbf{C}$, 则用户节点的态度值向量 $(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{C}) > \mathbf{0}$, 网络部分影响可控. 这为选择驱动节点提供了一种简单的方法: 选择集合 $D = \{k: T_{k,n} > 0\}$ 中的节点作为驱动节点并且令权值 $T_{k,1} \geq T_{k,n}, i \in D$. 在这种情况下, 态度值设置为 +1 的外部控制器对网络的影响将超过不可控源节点的影响. 当外部控制器的影响力没有不可控源节点强, 节

点的最终态度值不都为正. 如果能够对不可控源节点的邻居施加直接影响, 该网络将部分影响可控; 否则, 为了获得更强的影响, 应该选择靠近不可控源节点的节点作为驱动节点. 如果网络中存在多个这样的节点, 首先选择出度大于入度的节点, 外部控制器的影响能力随着其邻居数目的增大而增强.

3 复杂网络影响可控性与结构可控性

根据控制理论, 如果选择适当的输入, 一个动态网络系统能在有限时间内从任意初始状态到达任意目的状态, 则称该网络系统是结构可控的. 文献[8]采用线性系统理论对复杂网络的结构可控性进行研究, 采用线性时不变系统来描述复杂的网络系统

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t),$$

其中, $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ 是系统中 n 个节点在时刻 t 的状态, 矩阵 \mathbf{A} 表示节点间的相互作用, 矩阵 \mathbf{B} 是 $n \times m$ 的输入矩阵, 表示被外部控制器直接控制的节点. 外部控制器通过输入矢量 $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T$ 对网络进行控制.

在某种程度上, 网络的影响可控与结构可控存在一定的相似性, 均由一个外部控制器通过驱动节点对网络进行引导控制. 不同之处在于影响可控性关注网络最终是否达到共识, 而结构可控则要求网络能从任意初始状态到达任意目的状态.

对于结构可控性而言, 一个复杂网络系统如果是结构可控的, 则要求其控制矩阵:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{B}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{B})$$

必须满秩, 即 $\text{rank}(\mathbf{C}) = n$.

给定一个具有 n 个节点影响网络, 设其影响矩阵为 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 为一个矢量, 如果节点 i 是驱动节点, 则 $b_i = 1$, 否则为 0. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ 表示外部控制器对驱动节点的影响权值. 由定理 1 和引理 1 可知, 网络是完全影响可控的条件是:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{A} - \mathbf{C})^t = \mathbf{0},$$

其中, $\mathbf{C} = \text{diag}(b_1 u_1, b_2 u_2, \dots, b_n u_n)$ 为对角矩阵, \mathbf{I} 为 $n \times n$ 的单位矩阵.

给定一个复杂网络系统, 其结构可控所需的最少驱动节点数目由网络的最大匹配确定, 即驱动节点的数量等于网络所包含的最少的互不相交路径的条数.

推论 1. 给定一个驱动节点集合, 如果网络系

统是结构可控的, 则必定是影响可控的; 反之不一定成立.

4 结束语

本文研究了复杂社会网络的影响可控性问题, 推导出影响可控所需满足的结构条件, 并给出完全和部分影响控制的方法. 未来研究工作主要包括 2 个方面. 由于实现完全影响可控所需驱动节点的数目等于网络中闭集的数目, 有必要研究随机、无标度等复杂网络中闭集的个数及分布情况. 此外, DeGroot 模型主要用于描述网络的连续意见动态, 下一步将考虑离散意见动态的可控性问题.

参 考 文 献

- [1] Albert R, Barabasi A L. Statistical mechanics of complex networks [J]. *Review of Modern Physics*, 2002, 74(2): 47-91
- [2] Wang Xiaofan, Chen Guanrong. Complex network: Small-world, scale-free and beyond [J]. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, First Quarter, 2003, 3(1): 6-20
- [3] Hu Gangfeng, Li Deyi, Chen Guisheng, et al. Study of a novel approach to the evolution mechanism of complex networks [J]. *Journal of Computer Research and Development*, 2007, 44(Suppl 1): 263-267 (in Chinese)
(胡钢锋, 李德毅, 陈桂生, 等. 一种新的复杂网络演化机制研究[J]. *计算机研究与发展*, 2007, 44(增刊 I): 263-267)
- [4] DeGroot M H. Reaching a Consensus [J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1974, 69(345): 118-121
- [5] Jackson M O. *Social and Economic Networks* [M]. Princeton: Princeton University Press, 2008
- [6] Golub B, Jackson M O. Naive learning in social networks and the wisdom of crowds [J]. *American Economic Journal: Microeconomics*, 2010, 2(1): 112-149
- [7] Golub B, Jackson M O. How homophily affects the speed of learning and best-response dynamics [J]. *The Quarterly Journal of Economics*, 2012, 127(3): 1287-1338
- [8] Gale D, Kariv S. Bayesian learning in social networks [J]. *Games and Economic Behavior*, 2003, 45(2): 329-346
- [9] Friedkin N E, Johnsen E C. Social positions in influence networks [J]. *Social Networks*, 1997, 19(3): 209-222
- [10] Celen B, Kariv S. Distinguishing informational cascades from herd behavior in the laboratory [J]. *American Economic Review*, 2004, 94(3): 484-497
- [11] Liu Y Y, Slotine J J, Barabasi A L. Controllability of complex networks [J]. *Nature*, 2011, 473(3): 167-173
- [12] Wang Xiaofan, Chen Guanrong. Pinning control of scale-free dynamical networks [J]. *Physica A*, 2002, 310(3): 521-531

[13] Lewis T G. Network Science: Theory and Applications [M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 2009

[14] French J. A formal theory of social power [J]. Psychological Review, 1956, 63(2): 181-194

[15] Harary F A. Criterion for unanimity in French's theory of social power [J]. Studies in Social Power, 1959, 2(1): 168-182

[16] Golub B, Jackson M O. Naive learning in social networks: Convergence, influence and wisdom of crowds [J]. Coalition Theory Network, 2010, 2(1): 112-149

[17] DeMarzo P, Vayanos D, Zwiebel J. Persuasion bias, social influence, and unidimensional opinions [J]. The Quarterly Journal of Economics, 2003, 118(3): 909-968



Liu Zhihong, born in 1967. PhD and associate professor at Xidian University of China. His main research interests include mobile computing and information security.



security (yzeng@mail.xidian.edu.cn).



Wu Hongliang, born in 1988. Master candidate at Xidian University of China. His main research interests include complex networks and information security (xdwuhongliang@163.com).



Ma Jianfeng, born in 1965. Professor and PhD supervisor at Xidian University of China. Fellow member of China Computer Federation. His main research interests include wireless and mobile computing systems, computer networks, and information security (jfma@mail.xidian.edu.cn).

附录 A. 正文引理 1 的证明.

显然,如果矩阵 B 每行的元素之和都小于 1,则

$\|B\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1$, 由此可得,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $B^t \rightarrow 0$.

设 $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B^k = (b_{ij}^{(k)}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. 如果矩阵中存在整行元素之和为 1 的行,我们将证明,存在一个整数 k ,使得:

$$\|B^{k+1}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}^{(k+1)}| < 1.$$

首先,可证明矩阵 B^k 的每行元素之和是 k 的递

减函数,因为 $\sum_{q=1}^n b_{iq} \leq 1 (i=1, \dots, n)$, 所以矩阵 $B^{k+1} = B^k \cdot B$ 的每行元素之和为

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}^{(k+1)} = b_{i1}^{(k)} \sum_{q=1}^n b_{1q} + \dots + b_{in}^{(k)} \sum_{q=1}^n b_{nq} \leq b_{i1}^{(k)} + b_{i2}^{(k)} + \dots + b_{in}^{(k)} = \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(k)} \leq 1,$$

给定一个图的邻接矩阵 A , 矩阵 A^k 的第 (i, j) 个元素表示从节点 i 到 j 的长度为 k 的路径的数目. 对于矩阵 B , 从矩阵乘法的定义可知, 如果在矩阵 B 对应的邻接矩阵中, 存在一条从 i 到 j 的路径, 则矩阵 B^k 的第 (i, j) 个元素非零.

设 $S_1 = \{r_1, \dots, r_t\}$, $S_2 = \{r_{t+1}, \dots, r_n\}$. 假设 $r_i \in S_1 (1 \leq i \leq t)$ 和 $r_j \in S_2 (t+1 \leq j \leq n)$, 且从 r_j 到 r_i 存在一条长度为 k 的路径, 则 $0 < b_{r_j r_i}^{(k)} \leq 1$ 成立. 因此, 矩阵 B^{k+1} 第 r_j 行的和为

$$\sum_{q=1}^n b_{r_j q}^{(k+1)} = b_{r_j 1}^{(k)} \sum_{q=1}^n b_{1q} + \dots + b_{r_j r_i}^{(k)} \sum_{q=1}^n b_{r_i q} + \dots + b_{r_j n}^{(k)} \sum_{q=1}^n b_{nq} < b_{r_j 1}^{(k)} + \dots + b_{r_j r_i}^{(k)} + \dots + b_{r_j n}^{(k)} \leq 1,$$

其中, $\sum_{q=1}^n b_{r_i q} < 1, 0 < b_{r_j r_i}^{(k)} \leq 1$.

综上所述, 如果每个 S_2 中的节点都能到达集合 S_1 中的任意节点, 且 2 个集合节点间的最长路径为 k , 则有:

$$\|B^{k+1}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}^{(k+1)}| < 1.$$

由此可得, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $B^t \rightarrow 0$.

例如, 给定一个亚随机矩阵 B 和其对应的邻接矩阵 A ,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

在矩阵 \mathbf{B} 中, $\sum_{j=1}^5 b_{1j} < 1, S_1 = \{1\}, S_2 = \{2, 3, 4, 5\}$. 从邻接矩阵 \mathbf{A} 表示的有向图可以看出, 如图 A1(a) 所示, 集合 S_2 中的任意节点都可到达集合 S_1 中的节点. 由正文引理 4 可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{B}^t \rightarrow \mathbf{0}$. 同时可以看出, $b_{31} = 0, b_{51}^{(2)} = 0, b_{31}^{(3)} = 0$, 但 $b_{31}^{(4)} = 0.0833$, 即当 $k \geq 4$ 时:

$$\|\mathbf{B}^{k+1}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}^{(k+1)}| < 1.$$

如果矩阵 \mathbf{B} 变为如下形式:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{B}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则矩阵不会收敛到 $\mathbf{0}$. 由矩阵 \mathbf{B} 的图形表示形式图 A1(b) 也可以看出, 集合 $S_2 = \{2, 3, 4, 5\}$ 中的节点 4 不能到达集合 $S_1 = \{1\}$ 中的节点, 因此矩阵 \mathbf{B} 不收敛到 $\mathbf{0}$.

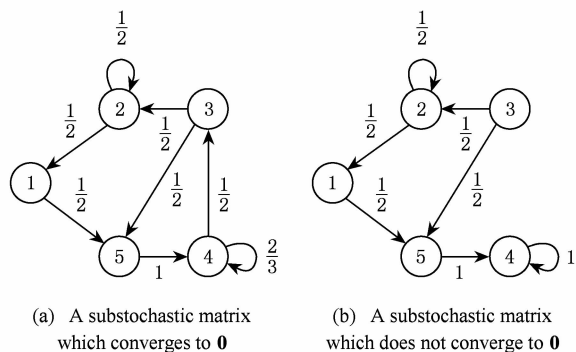


Fig. A1 Graphical representations of two matrices.

图 A1 2 个亚随机矩阵的图形表示形式