

基于稀疏表示的含噪图像超分辨率重建方法

窦 诺^{1,2} 赵瑞珍^{1,2,3} 岑翼刚^{1,2} 胡绍海^{1,2} 张勇东³

¹(北京交通大学信息科学研究所 北京 100044)
²(北京市现代信息科学与网络技术重点实验室(北京交通大学信息科学研究所) 北京 100044)
³(中国科学院智能信息处理重点实验室(中国科学院计算技术研究所) 北京 100190)
(dounuo@126.com)

Noisy Image Super-Resolution Reconstruction Based on Sparse Representation

Dou Nuo^{1,2}, Zhao Ruizhen^{1,2,3}, Cen Yigang^{1,2}, Hu Shaohai^{1,2}, and Zhang Yongdong³

¹(Institute of Information Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044)
²(Beijing Key Laboratory of Advanced Information Science and Network Technology (Institute of Information Science, Beijing Jiaotong University), Beijing 100044)
³(Key Laboratory of Intelligent Information Processing, Chinese Academy of Sciences (Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences), Beijing 100190)

Abstract Denoising and super-resolution reconstruction are performed separately in traditional methods for noisy image super-resolution reconstruction, while in the noisy image super-resolution reconstruction method based on sparse representation and dictionary learning the two processes are compounded together. Since an image patch can be well represented as a sparse linear combination of elements from an appropriately chosen over-complete dictionary, two dictionaries are trained respectively from noisy low- and clean high- resolution image patches by enforcing the similarity of two sparse representations with respect to their own dictionary. Given a noisy low-resolution image, sparse representations of low-resolution patches via trained low-dictionary are computed, then the high-resolution image can be reconstructed from high-resolution patches with the help of the related low-resolution sparse representations and trained high-dictionary, after global optimization a clean high-resolution is obtained to accomplish the goal of image super-resolution and denosing simultaneously. The experiments show that zooming low-resolution image to a middle-resolution using locally adaptive zooming algorithm for extracting features can get a better reconstructed image than bicubic interpolation algorithm. By setting the parameter λ , we can obtain the best performance both in super-resolution and denoising with absolute advantages in image quality and visual effect, which demonstrates the validity and robustness of our algorithm.

Key words sparse representation; image super-resolution; image denoising; dictionary learning; image reconstruction

摘 要 传统的含噪图像超分辨率方法只能将图像去噪和图像超分辨率分别进行处理,基于稀疏表示与字典训练的含噪声图像超分辨重建方法将两者融合在一起.提出一种基于图像块在训练字典下稀疏表示的协同处理方法,来解决含噪图像超分辨的问题.由于图像块可以由字典下的稀疏系数来表示,所以可训练一个分别适用于含噪低分辨率图像块和清晰高分辨率图像块的字典对,使得高低分辨率图像块在该

字典对下具有相同的稀疏表示.当输入含噪低分辨率图像块时,先计算出其在低分辨率字典下的稀疏表示系数,然后利用此稀疏系数在高分辨率字典下进行重建,可得到清晰高分辨率图像块,最后通过整体优化完成清晰高分辨率图像,实现图像超分辨和图像去噪的目的.实验证明,采用局部自适应插值的方法放大低分辨率图像到中间分辨率再进行特征提取,比以往采用的双三线性插值的方法在重建图像质量上有提高,并通过研究字典 λ 参数的设置使得超分辨重建和去噪结果同时达到最佳,即在图像的视觉和质量上都具有较为明显的优势,具有很好的鲁棒性和有效性.

关键词 稀疏表示;图像超分辨;图像去噪;字典训练;图像重建

中图法分类号 TP391.41

超分辨率(super-resolution, SR)重建技术^[1-9]是指通过图像处理算法来获得在成像系统分辨率极限之上的更高分辨率图像,其实现成本相较于减小成像系统像素尺寸和改变探测元排列方式等要低廉得多.为了获得更为精确和鲁棒的图像处理结果,通常需要通过从一幅或多幅具有互补信息的低分辨率图像中估计或合成出高分辨率图像.该技术不但可以改进图像的视觉效果,而且对图像的后续处理如特征提取、信息识别等具有十分重要的意义,例如在遥感监测、军事侦察、交通及安全监控、医学诊断和模式识别等应用中,图像超分辨技术就为其提供了丰富的细节信息.另外,进行超分辨的低分辨率图像往往也会受各种噪声的影响,增加了超分辨技术的难度.本文对通过单一含噪图像进行图像超分辨的方法进行了研究.为克服传统的图像去噪^[10-11]和图像超分辨重建只能分开进行处理的局限性,我们尝试将两者结合在一起进行处理,提出了一种基于稀疏表示与字典训练的含噪图像超分辨重建方法,实验结果表明,本文方法可以得到更有效和鲁棒的高分辨率图像重建结果.

1 理论基础

1.1 稀疏表示基础

Mallat 和 Zhang 等人^[12-13]于 1993 年提出信号在过完备原子库上分解的思想,通过选取合适的原子可以得到更加灵活、简洁的信号表示形式,也就是信号的稀疏表示.稀疏信号(sparse signal)的定义^[14-17]:若信号 x 仅有 K 有限个采样点非 0,其他采样点均为 0,则信号 x 是 K 稀疏的.对于任意信号集合 $\Gamma \subset \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^{n \times W}, D$ 为包含 W 个原子(列)的特定字典(矩阵).一般而言,信号 x 可由字典 D 中有限原子进行线性表示,即 $\forall x \in \Gamma, \exists \alpha \in \mathbb{R}^W$,有:

$$x = D\alpha, \text{ s. t. } \|\alpha\|_0 \ll n, \tag{1}$$

其中 $\|\cdot\|_0$ 是 L_0 范数, $\|\alpha\|_0$ 代表向量 α 的非零值个数,则称 α 为信号 x 的稀疏表示.若 $W > n$,表

明字典 D 在表示信号 x 时是冗余的.对于稀疏表示 α 的求解,可近似写成如下形式:

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} \|D\alpha - x\|_2^2 + \mu \|\alpha\|_0, \tag{2}$$

其中 μ 为折中参数.

1.2 稀疏表示的含噪声图像超分辨局部模型

设 $x \in \mathbb{R}^N$ 和 $y \in \mathbb{R}^M$ 分别为提取出来的高分辨率图像块和相关的低分辨率观测图像块,表示为列向量形式.则图像块的降质模型可以写成^[18-19]:

$$y = Lx + z, \tag{3}$$

其中 L 为下采样运算器, z 为噪声.显然,通过 y 求解 x 是一个病态的逆问题.

稀疏性指的是高分辨率图像块 x 可以由字典中的原子线性稀疏表示,即 $x = D_h \alpha$,其中 $D_h \subset \mathbb{R}^{N \times W} (N \ll W)$ 为字典, $\alpha \in \mathbb{R}^W$ 为其稀疏系数,所以低分辨率图像块 y 可以写为 $y = D_l \alpha + z$,其中 $D_l \equiv LD_h \subset \mathbb{R}^{M \times W} (M \ll W)$.这里我们假设噪声为高斯白噪声,且满足条件 $\|z\|_2 \leq \epsilon$,即有:

$$\|y - D_l \alpha\|_2 \leq \epsilon, \tag{4}$$

其中 ϵ 为一个正实数,表示噪声程度.式(4)可转化为稀疏向量 α 的优化问题:

$$P_0(\epsilon): \min_{\alpha} \|\alpha\|_0, \text{ s. t. } \|y - D_l \alpha\|_2 \leq \epsilon. \tag{5}$$

若 ϵ 取值合适,求解式(5)得到最优值 $\hat{\alpha}$,使得低分辨率观测图像块的估计值 $\hat{y} = D_l \hat{\alpha}$ 清晰不含噪声,即通过重建的方法达到去噪的效果.同时通过 $\hat{x} = D_h \hat{\alpha}$ 重建出的高分辨率图像 $\hat{x}$,完成由含噪声的低分辨率图像信号 y 重建出无噪声高分辨率图像块 x 的过程,使得超分辨率重建的同时达到去噪的效果.

将式(5) L_0 范数最小问题转化为 L_1 范数最小,结合上述高低分辨率图像块间的联系,则有:

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_1, \text{ s. t. } \|FD_l \alpha - Fy\|_2^2 \leq \epsilon_1, \\ \|TD_h \alpha - \omega\|_2^2 \leq \epsilon_2, \tag{6}$$

其中, F 为特征提取运算符.注意本文不是直接针对待处理低分辨率图像块进行稀疏表示,而是针对图像的特征来进行处理, $\|FD_l \alpha - Fy\|_2^2 \leq \epsilon_1$ 约束了重建高分辨率图像块与输入低分辨率图像块的匹配

程度. T 提取出当前目标块和上一个高分辨重建得到的图像块之间重叠的区域, ω 为上一块重建在重叠区域的数值, $\|TD_h\alpha - \omega\|_2 \leq \varepsilon_2$ 保证了高分辨率图像块的邻域相关性.

采用拉格朗日乘子法, 式(6)可进一步合写为

$$\min_{\alpha} \|\tilde{D}\alpha - \tilde{y}\|_2^2 + \lambda \|\alpha\|_1, \quad (7)$$

其中, $\tilde{D} = \begin{bmatrix} FD_1 \\ \beta TD_h \end{bmatrix}$, $\tilde{y} = \begin{bmatrix} Fy \\ \beta\omega \end{bmatrix}$, β 为控制式(6)中 2 个约束条件的一个平衡参数. 求解上述问题的最优解可用正交匹配追踪 (OMP)^[20]、基追踪去噪 (BPDN)^[21] 等方法.

总体来说, 对每个输入低分辨率图像块 y , 首先找到它在字典 D_1 下的稀疏表示 α , 保证对应的高、低分辨率图像块在字典对下有相同的稀疏表示, 相关的高分辨率图像块将会根据这些参数 α 选中字典 D_h 中的原子进行组合, 从而得到输出的高分辨图像块 x .

1.3 低分辨率图像块的特征表示

为了更好地获得图像信息, 需先对图像进行特征提取, 再进行稀疏表示. 事实上, 我们发现从低分辨率图像的向上采样图像空间中提取特征, 其效果要好于直接从原始低分辨率图像空间中提取特征. 在字典训练时, Yang 等人^[18]首先对低分辨率图像进行双三线性插值放大 2 倍, 作为中间分辨率图像再对其进行特征提取, 经本文实验发现, 用局部自适应插值的方法比双三线性插值能取得更好的放大效果, 所以本文选取局部自适应插值法将低分辨率图像进行 2 倍向上采样, 再提取插值后图像的梯度特征, 来降低超分辨预处理过程造成的误差, 以提高最终超分辨重建图像的质量. 由于这个过程放大比率已知, 在进行训练和测试时就很容易追踪到高分辨图像块和向上采样的低分辨率图像块间的联系. 从低分辨率图像块中提取特征的方式也使式(7)中联合字典的过程更合理, 而不是将高低分辨率字典只进行简单的线性连接.

1.3.1 特征提取

由于人眼对图像中的高频分量最为敏感, 所以通常 F 可以取高通滤波器, 这在感知观点中也是最合理的. 以往的超分辨率重建通常采用的方法为通过提取低分辨率图像块的不同特征来提高预测的精确性^[21-25]. 例如, Freeman 等人^[22]使用一组高斯滤波器来提取低分辨率图像块的轮廓; Chang 等人^[23]使用图像的一阶二阶梯度作为低分辨率图像块的特征表示. 由于微分的简洁性和有效性, 本文主要使用

一阶二阶微分作为低分辨率图像块的梯度特征, 4 个 1 维滤波器如下^[18]:

$$f_1 = [-1, 0, 1], f_2 = f_1^T,$$

$$f_3 = [1, 0, -2, 0, 1], f_4 = f_3^T, \quad (8)$$

其中 T 表示转置. 使用这 4 个滤波器可以得到每个小块的 4 个特征向量, 将其连接成一个向量作为低分辨率图像块的最终特征表示. 在算法实现中, 4 个滤波器不是直接应用到采样得到的低分辨率图像小块中, 而是应用到整幅训练图像中. 因此对于每一幅低分辨率训练图像, 我们将得到 4 幅梯度图, 再取出 4 幅梯度图中同一位置的图像小块, 将 4 个图像小块连接成图像的特征向量. 因此, 每个低分辨率图像块的特征表示也包含了它的邻域信息, 这对改善和提高最终超分辨图像中图像块的邻域相关性很有帮助.

另外, 针对不同的图像, 我们适当地增加了一些特征来突出图像的特点, 如:

$$f_L = [1, 4, 6, 4, 1],$$

$$f_E = [-1, -2, 0, 2, 1],$$

$$f_S = [-1, 0, 2, 0, -1],$$

$$f_R = [1, -4, 6, -4, 1],$$

$$f_W = [-1, 2, 0, -2, 1], \quad (9)$$

其中, f_L 提取图像的 level 特征, 用来计算对称权重的局部灰度水平; f_E 提取图像的 edge 特征, 即图像的边缘信息; f_S 提取图像的 spot 特征, 即斑点信息; f_R 提取图像的 ripple 特征, 用来检测波纹; f_W 提取图像的 wave 特征, 表示图像的波浪信息.

1.3.2 局部自适应插值

局部自适应插值^[26]由 Battiato 等人提出, 基本原理为基于梯度的插值, 具体可分为以下 3 个过程:

1) 将原大小为 $n \times n$ 的图像简单放大到 $2n \times 2n$ 大小.

2) 放大后图像的像素分布可以分成如图 1 中的 3 种情况, 分别判断简单插值放大后的未赋值的灰度点是属于哪种边缘梯度, 然后再根据设定的阈值确定该点的灰度值, 即根据 A, B, C, D 按照梯度规则求得点 X, H_1, H_2, V_1, V_2 的灰度值. 完成该步

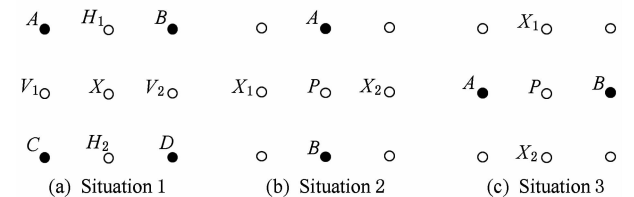


Fig. 1 Zooming pixels distribution.

图 1 图像放大后像素分布

骤后, 仍有许多不符合上述条件点没有赋值. 针对图 1(b)(c) 的情况, 再根据 A, B, X_1, X_2 点按照一定条件来确定 P 点的灰度值.

3) 对余下的点采用加权中值法赋值. 未被赋值的点在图像中灰度变化较为平缓, 梯度变化很不明显, 因此采用加权中值的方法进行填补, 最终完成高

分辨率图像所有插值点的赋值.

2 含噪图像超分辨重建

含噪图像超分辨主要包括 2 部分: 字典的训练和图像超分辨率重建, 如图 2 所示:

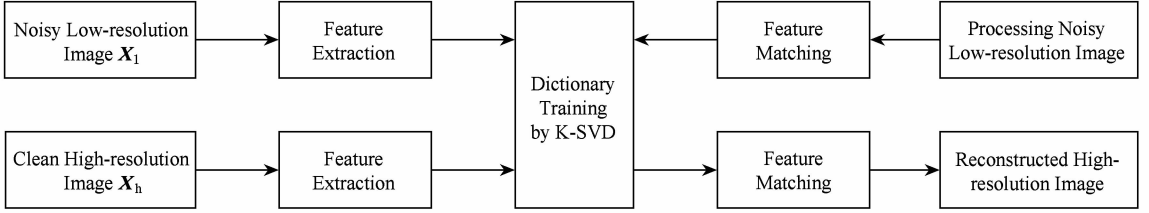


Fig. 2 Sparse representation based noisy image super-resolution method.

图 2 基于稀疏表示的含噪图像超分辨重建方法

图 2 中左边为字典训练过程, 右边为本文方法进行稀疏表示的含噪图像超分辨率重建. 下面分别讨论如何训练字典 D_h 和 D_l 以及如何通过超分辨重建约束条件来进行重建优化.

2.1 训练字典 D_h 和 D_l 进行图像超分辨率重建

所给的采样后的训练图像块对为 $I = [X_h, Y_l]$, 其中 $X_h = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ 是采样后的高分辨率图图像块组, $Y_l = [y_1, y_2, \dots, y_M]$ 是相关的低分辨率图像块 (或特征), 我们的目标是为高分辨率和低分辨率图像块训练字典, 所以需要令高低分辨率图像块的稀疏表示是相同的. 这正是问题的难度所在, 超分辨本身是病态性问题. 高分辨率和低分辨率图像块空间各自的稀疏编码问题分别是:

$$D_h = \arg \min_{\{D_h, A\}} \|X_h - D_h A\|_2 + \lambda \|A\|_1 \quad (10)$$

和

$$D_l = \arg \min_{\{D_l, A\}} \|Y_l - D_l A\|_2 + \lambda \|A\|_1, \quad (11)$$

其中 A 为稀疏表示系数矩阵. 结合这些约束条件, 由于要使高低分辨率图像稀疏表示具有相同的编码系数, 式(10)和式(11)可合写成如下优化问题^[27-29]:

$$\min_{\{D_h, D_l, A\}} \frac{1}{N} \|X_h - D_h A\|_2^2 + \frac{1}{M} \|Y_l - D_l A\|_2^2 + \lambda \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{M} \right) \|A\|_1, \quad (12)$$

其中 N 和 M 是高分辨和低分辨图像块 (或特征) 的维数. 这里, $1/N$ 和 $1/M$ 为平衡式(10)和式(11)的 2 个惩罚项. 式(12)可进一步写成:

$$\min_{\{D_h, D_l, A\}} \|X_c - D_c A\|_2^2 + \lambda \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{M} \right) \|A\|_1, \quad (13)$$

或者:

$$\min_{\{D_h, D_l, A\}} \|X_c - D_c A\|_2^2 + \hat{\lambda} \|A\|_1, \quad (14)$$

其中,

$$X_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} X_h \\ \frac{1}{\sqrt{M}} Y_l \end{bmatrix}, D_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} D_h \\ \frac{1}{\sqrt{M}} D_l \end{bmatrix}, \hat{\lambda} = \lambda \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{M} \right). \quad (15)$$

因此, 我们可以使用相同的学习方法, 通过训练单一字典而达到训练 2 个字典的目的, 简化超分辨率重建字典训练的模型. 注意, 因为我们在低分辨图像块中提取的是特征分量, D_h 和 D_l 不能只作简单的线性连接, 必须进行归一化处理, 否则式(14)的训练过程将仅取决于高分辨图像块.

稀疏表示模型中最根本的问题是字典 D 的选择, 从样本数据中训练的字典强调字典的冗余和过完备性. 本文将完全不相关的自然图像块作为训练样本, 设计基于训练字典的图像重建方法.

训练字典的优化问题可以采用稀疏性约束的表示方式:

$$D = \arg \min_{\{D, A\}} \|X - DA\|_2^2, \text{ s. t. } \begin{cases} \forall i, \|a_i\|_0 \leq k, \\ \forall j, \|d_j\|_0 = 1, \end{cases} \quad (16)$$

其中, $X = \{x_j\}$ 为图像块样本集合, A 的列向量 a_i 为样本图像块的稀疏系数, d_j 为字典 D 的标准化原子. 式(16)为非凸问题, 但当其中一个变量已知或固定时可以转换为凸优化问题. 求解此类问题通常采用将其中一个变量固定再估计另外一个变量的方法, 一般可分 2 个过程: 首先假设 D 已知, 通过追踪

算法来估计出信号在字典下的稀疏表示系数;再固定稀疏表示系数,进而更新字典中的每列原子.目前的算法有广义 PCA (generalized PCA)^[30], MOD(method of optimal directions)^[31], K-SVD^[32]等.相对固定基字典,通过样本学习得到的字典的自适应能力更强,信号在学习字典下的表示更为精确. K-SVD 方法^[32]训练字典具体如下.

算法 1. 字典训练.

输入:训练样本集 $\mathbf{X}$;

输出:训练字典 $\mathbf{D}$,稀疏表示系数矩阵 $\mathbf{A}$.

① 初始化:设 $\mathbf{D}$ 为任意满秩矩阵,每一列均为标准归一化向量;

② 稀疏编码:设 $\mathbf{D}$ 已知,依次取样本 $\mathbf{x}_i$,计算其在字典 $\mathbf{D}$ 下的稀疏表示系数 $\boldsymbol{\alpha}_i$:

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \arg \min_{\boldsymbol{\alpha}} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}_i\|_2^2, \text{ s. t. } \|\boldsymbol{\alpha}_i\| \leq s, \quad (17)$$

s 为信号稀疏度,式(17)可通过匹配追踪等算法计算,当然也可以转换为 L_0 范数最小问题,采用基追踪等算法求解;

③ 字典更新:采用 K-SVD 方法,逐步对每个原子 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 进行更新.设 $I_k = \{i \mid \boldsymbol{\alpha}_i(k) \neq 0\}$,表示当前应用原子 $\mathbf{d}_k$ 的系数序列.根据下列原则更新原子 $\mathbf{d}_k$ 及系数 $\boldsymbol{\alpha}_i(k) = (\boldsymbol{\alpha}_i(k))_{i \in I_k}$:

$$\{\mathbf{d}_k, \boldsymbol{\alpha}_i(k)\} = \arg \min_{\mathbf{d}_k, \boldsymbol{\alpha}_i(k)} \sum_{j \in I_k} \|\bar{\mathbf{x}}_j - \mathbf{U}\boldsymbol{\alpha}_j \mathbf{V}^T\|_2^2, \quad (18)$$

其中 $\bar{\mathbf{x}}_j = \mathbf{x}_j - \sum_{l \neq k} \boldsymbol{\alpha}_i(j) \mathbf{d}_l$ 为当前字典 $\mathbf{D}$ 中除去 $\mathbf{d}_k$ 以外的原子表示 $\mathbf{x}_j$ 的误差矩阵,用 SVD 对其进行分解,即 $\bar{\mathbf{x}}_j = \mathbf{U}\boldsymbol{\alpha}_j \mathbf{V}^T$, $\boldsymbol{\alpha}_j$ 为对角矩阵,对角元素为误差矩阵的奇异值,取矩阵 $\mathbf{U}$ 的第 1 列为字典当前列的更新值 $\mathbf{d}_k$, $\mathbf{V}^T$ 的第 1 行为系数的更新值 $\boldsymbol{\alpha}_i(k)$;

④ 标准化: $\forall k, \mathbf{d}_k \leftarrow \mathbf{d}_k / \|\mathbf{d}_k\|_2$;

⑤ 迭代:如果未达到稀疏性要求,转至第②步,否则退出.

稀疏编码问题是基于信号稀疏表示模型,在假设字典 $\mathbf{D}$ 固定或已知的情况下,对输入信号 $\mathbf{x}$ 的稀疏表示系数 $\boldsymbol{\alpha}$ 进行估计的问题.在此部分工作中,研究现有的稀疏编码算法,主要有 BP, MP, OMP, 以及基于这些算法的改进算法如 StOMP, ROMP, SP, CoSaMP, SAMP 等,本文使用的是梯度下降法^[33].

2.2 优化问题

2.2.1 加强全局重构约束

由于低分辨率块 $\mathbf{y}$ 和它的稀疏表示重构 $\mathbf{D}_l \boldsymbol{\alpha}$ 间不严格相等,因此,也由于噪声,高分辨率图像 $\mathbf{X}$ 用之前提到的方法得到的稀疏表示并不能准确满足重构

约束.我们通过将一幅高分辨率图像 $\mathbf{X}_0$ 投影到 $\boldsymbol{\Phi}\Psi\mathbf{X}=\mathbf{Y}$ 的解空间来消除误差,计算:

$$\mathbf{X}^* = \arg \min_{\mathbf{X}} \|\boldsymbol{\Phi}\Psi\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_2^2 + c \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|_2^2, \quad (19)$$

其中 c 为平衡参数.式(19)优化问题的解可以通过梯度下降法有效计算出来,其迭代更新方程为

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{X}_t + v[\Psi^T \boldsymbol{\Phi}^T (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\Phi}\Psi\mathbf{X}_t) + c(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)], \quad (20)$$

其中 $\mathbf{X}_t$ 为高分辨率图像 t 次迭代后的估计, v 为梯度下降的步距^[33].

我们取结果 $\mathbf{X}^*$ 作为上述算法中高分辨率图像的最终估计值.在满足重构约束条件下,此图像和稀疏下的原始图像 $\mathbf{X}_0$ 尽可能近似.

2.2.2 全局优化插值

第 2.1 节列出的简单超分辨算法可以看成是图像处理逆问题普遍应用稀疏框架的一个特例.相关思想已被很好地应用到图像压缩、去噪和修复中.这些思想表明除了能将我们的方法应用到更大范围中,在提高计算复杂度的代价下还可以进一步改善结果.

有了充分的计算资源就可以基本上同时求解出所有图像块的系数.并且,整幅高分辨率图像 $\mathbf{X}$ 本身可以作为变量处理.除了要求 $\mathbf{X}$ 能由稀疏系数 $\boldsymbol{\alpha}$ 和字典很好地表示外,还要对 $\mathbf{X}$ 和由参数表示的高分辨率图像间的差值进行补偿,可行解不仅能很好地满足稀疏,还要能更好地满足重构约束条件,这将成为一个较大的优化问题:

$$\mathbf{X}^* = \arg \min_{\{\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}_{i,j}\}} \left\{ \|\boldsymbol{\Phi}\Psi\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_2^2 + \lambda \sum_{i,j} \|\mathbf{D}_h \boldsymbol{\alpha}_{i,j} - \mathbf{T}_{i,j} \mathbf{X}\|_2^2 + \tau \rho(\mathbf{X}) \right\}, \quad (21)$$

其中, $\boldsymbol{\alpha}_{i,j}$ 表示图像 $\mathbf{X}$ 的第 (i, j) 块的稀疏系数, $\mathbf{T}_{i,j}$ 是一个从 $\mathbf{X}$ 中选出的第 (i, j) 块的投影矩阵, $\rho(\mathbf{X})$ 是对添加先验知识的补偿函数,函数可选取普通规则化形式(例如 Huber MRF, 总变分, 双边总变分)^[11].

稀疏表示过程将式(21)通过求解第 2 项和第 3 项和的近似最小值来得到参数 $\boldsymbol{\alpha}$. 其中,稀疏约束项 $\|\boldsymbol{\alpha}_{i,j}\|_0$ 可松弛为 $\|\boldsymbol{\alpha}_{i,j}\|_1$ 来求解,高分辨率项 $\|\mathbf{D}_h \boldsymbol{\alpha}_{i,j} - \mathbf{T}_{i,j} \mathbf{X}\|_2$ 可由它的低分辨率形式 $\|\mathbf{F} \mathbf{D}_l \boldsymbol{\alpha}_{i,j} - \mathbf{F} \mathbf{y}_{i,j}\|_2$ 来近似替代.

2.3 含噪图像超分辨去噪参数设置

大多数的单帧图像超分辨重建算法都假设输入图像是干净无噪声的,而实际上输入图像往往是含噪声的.针对含噪声图像超分辨问题,以往的算法往往将超分辨重建和去噪分为 2 个相关联又独立的

环节进行. 然而, 这种方法的超分辨重建图像质量往往依赖于去噪技术, 去噪产生的失真和假影等影响在 SR 过程中被保留甚至放大. 然而, 若将这个问题转化为稀疏表示模型, 通过稀疏表示模型进行超分辨重建对噪声更具鲁棒性, 并且通过设置参数能将去噪和超分辨 2 个环节同时进行.

将式(7)转化为后验概率问题(MAP), 则

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} P(\alpha)P(\bar{y}|\alpha, \tilde{D}), \tag{22}$$

其中,

$$P(\alpha) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{\|\alpha\|_1}{2b}\right), \tag{23}$$

$$P(\bar{y}|\alpha, \tilde{D}) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|\tilde{D}\alpha - \bar{y}\|_2^2\right), \tag{24}$$

其中 b 是 α 的拉普拉斯先验估计的方差, σ^2 是信号 $\bar{y}$ 中假定含的高斯噪声的方差.

对式(22)右边取自然对数, 转化为

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} (-\ln(P(\alpha) + P(\bar{y}|\alpha, \tilde{D}))). \tag{25}$$

将式(23)和式(24)代入式(25), 则上述问题可转化为

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} \ln 4b\sigma^2 \left(\frac{\|\alpha\|_1}{2b} + \frac{\|\tilde{D}\alpha - \bar{y}\|_2^2}{2\sigma^2} \right), \tag{26}$$

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} \frac{\ln 4b\sigma^2}{2\sigma^2} \left(\|\tilde{D}\alpha - \bar{y}\|_2^2 + \frac{\sigma^2}{b} \|\alpha\|_1 \right). \tag{27}$$

将式(27)与 $\min_{\alpha} \|\tilde{D}\alpha - \bar{y}\|_2^2 + \lambda \|\alpha\|_1$ 对比可

看出, 当 $\lambda = \sigma^2/b$ 时式(27)能得到最优解. 上述 MAP 模型的最优解可用正交匹配追踪(OMP)^[20]、基追踪去噪(BPDN)^[21]等方法求解. 假设拉普拉斯方差 b 是固定的, 信号的噪声越大(即 σ^2 越大)值就应越大. 另一方面, 给定输入图像后, λ 值设的越大, 模型从信号中假设的噪声就越大, 因此会得到更为光滑的输出图像, 导致丢失许多高频信息.

3 实验结果与分析

图 3 给出原始清晰图像以及用直接放大插值、双三次线性插值和本文基于字典学习稀疏表示的方法进行的 3×3 放大超分辨重建结果, 可以看出, 本文方法在视觉上对恢复图像细节方面有很大的优势.

图 4 给出了含噪声的图像使用本文方法 λ 为固定值 0.1 时的超分辨重建结果, 显然, 本文方法在进行超分辨的同时达到了去噪的效果. 随着噪声水平的加强, 重建效果变差.

图 5 给出了含噪声图像使用本文算法得到超分辨重建结果, 对比图 4 结论十分明显, 当随着噪声等级的增加, λ 值随着增大会大大改善重建图像的质量.

图 6 给出了一组 Lena 图像的实验结果, 可以看出, λ 随着噪声的增强而提高可以得到很好的图像重建质量.

表 1 为使用本文方法处理含噪图像得到的超分辨图像的峰值信噪比 PSNR 值, σ^2 为高斯白噪声的

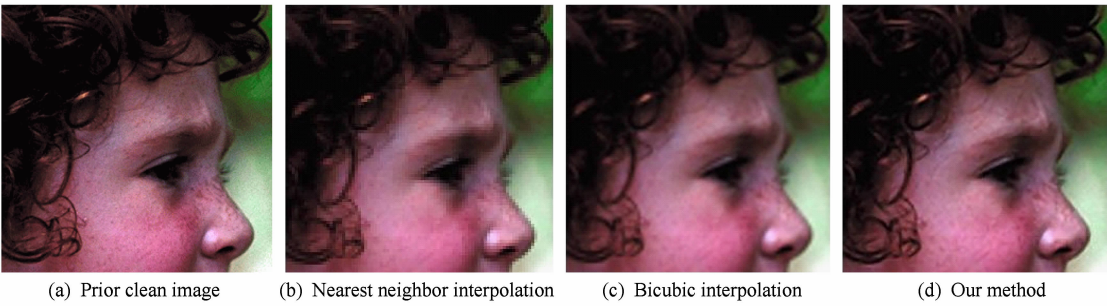


Fig. 3 Comparison of Boy super-resolution images.
图 3 Boy 图像不同方法超分辨结果对比



Fig. 4 Super-resolution images of Boy by our method($\lambda = 0.1$).
图 4 Boy 图像使用本文方法超分辨重建结果(λ 固定)

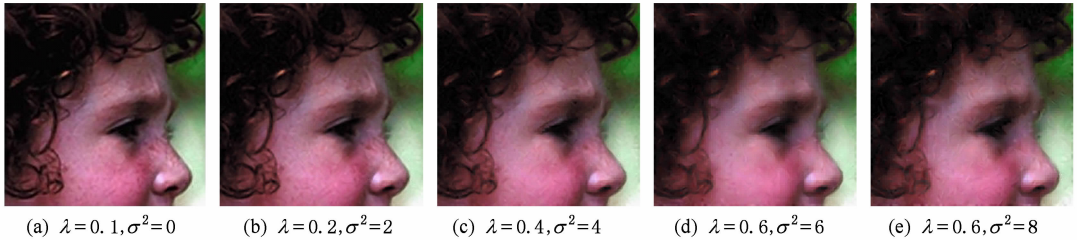


Fig. 5 Super-resolution images of Boy by our method($\lambda=\sigma^2/b$).

图 5 Boy 图像使用本文方法超分辨重建结果($\lambda=\sigma^2/b$)



Fig. 6 Super-resolution images of Lena by our method.

图 6 Lena 图像使用本文方法超分辨重建结果

Table 1 The PSNR of Super-resolution Image

表 1 超分辨重建图像的 PSNR 值

σ^2	PSNR/dB						
	$\lambda=0.05$	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.2$	$\lambda=0.4$	$\lambda=0.6$	$\lambda=0.8$	$\lambda=1$
0	33.4188	33.9124	33.8545	33.3096	33.0049	32.5153	32.2744
2	33.3882	33.4802	33.5479	33.3231	32.9179	32.4398	32.2418
4	32.3152	32.5111	32.7825	32.9493	32.7225	32.3249	32.1875
6	31.2792	31.4766	31.8836	32.4251	32.4365	32.1681	32.1182
8	30.4754	30.673	31.1292	31.8738	32.1428	32.0273	31.9638
10	29.7141	30.0869	30.5414	31.3384	31.8624	31.8636	31.8291

方差,为了使数据更客观准确,每个噪声等级对应参数的不同值,都同时处理了 10 幅噪声图像来取平均

值得到表中 PSNR 值. 经大量实验发现, σ^2 为 1~6 之间时,取值为 $\lambda=\sigma^2/10$ 较为合适, σ^2 略大于 6 时, λ 稍小于 $\sigma^2/10$ 较好. 图 7 更加形象直观地反映了 λ 与噪声水平 σ^2 的关系以及对重建图像 PSNR 的影响.

理论和实验均证明字典越大图像重建质量越好,而同时计算量和字典尺寸的大小是成正比的,计算量也越大. 本文算法用 Matlab 实现,并没有对速度进行优化,在 Intel® Core™ i5-2400 CPU@3.10 GHz,内存 4.00 GB 的计算机下运行 MATLAB R2012a,处理一幅 256×256 像素的图像只需几秒. 综合考虑字典运算量和图像质量,本文使用字典长度为 1024.

4 结束语

通过大量实验说明,本文方法通过合理设置和待处理的含噪声图像噪声水平相适应的 λ 值,再进行基于稀疏表示字典训练的方法进行超分辨,能在

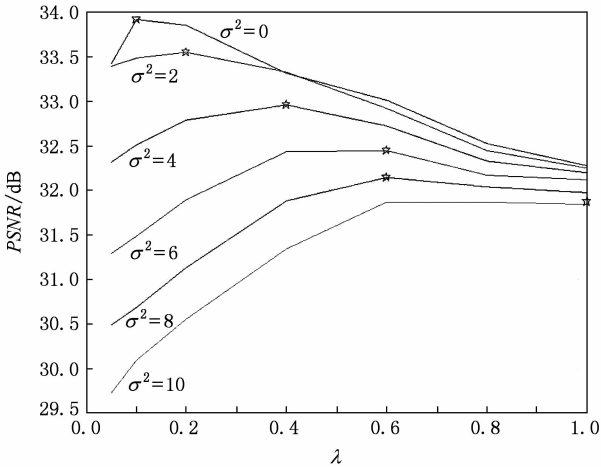


Fig. 7 The PSNR of reconstructed images with different λ and σ^2 .

图 7 字典参数 λ 与噪声水平 σ^2 对重建图像 PSNR 的影响

超分辨的过程中达到去噪的效果. 简化了含噪声图像超分辨和去噪单独进行的过程. 实验结果表明, 本文方法具有有效性和鲁棒性, 无论在视觉上还是图像质量上都能得到令人满意的超分辨结果.

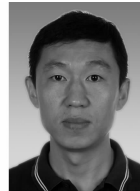
参 考 文 献

- [1] Bhavsar A V. Range image super-resolution via reconstruction of sparse range data [C] //Proc of 2013 Int Conf on Intelligent Systems and Signal Processing (ISSP). Piscataway, NJ: IEEE, 2013: 198-203
- [2] Tian Y, Yap K. Joint image registration and super-resolution from low-resolution images with zooming motion [J]. IEEE Trans on Circuits and Systems for Video Technology, 2013, 23(7): 1224-1234
- [3] Chang Ho-Hsuan, Shia Jin-Shing, Tsai Zeng-Hwa. Image registration based on CEMD [C] //Proc of the 2nd IEEE Int Symp on Next-Generation Electronics (ISNE). Piscataway, NJ: IEEE, 2013: 537-540
- [4] Yang Min-Chun, Wang Yu-Chiang Frank. A self-learning approach to single image super-resolution [J]. IEEE Trans on Multimedia, 2013, 15(3): 498-508
- [5] Zhu Qiuyu, Li Yichun. Super-resolution and de-noising for portrait images using compressive sensing [C] //Proc of the 3rd Int Conf on Intelligent System Design and Engineering Applications (ISDEA). Piscataway, NJ: IEEE, 2013: 1368-1371
- [6] Pan Zongxu, Yu Jing, Huang Huijuan, et al. Super-resolution based on compressive sensing and structural self-similarity for remote sensing images [J]. IEEE Trans on Geoscience and Remote Sensing, 2013, 51(9): 4864-4876
- [7] Sasao Tomoki, Hiura Shinsaku, Sato Kosuke. Super-resolution with randomly shaped pixels and sparse regularization [C] //Proc of 2013 IEEE Int Conf on Computational Photography (ICCP). Piscataway, NJ: IEEE, 2013: 1-11
- [8] Ning Qiang, Chen Kan, Li Yi, et al. Image super-resolution via analysis sparse prior [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2013, 20(4): 399-402
- [9] Sung Cheol Park, Min Kyu Park, Moon Gi Kang. Super-resolution reconstruction: A technical overview [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2003, 20(3): 21-36
- [10] Liu Yanli, Wang Jin, Chen Xi, et al. A robust and fast non-local means algorithm for image denoising [C] //Proc of the 10th IEEE Int Conf on Computer Aided Design and Computer Graphics. Piscataway, NJ: IEEE, 2007: 30-30
- [11] Elad M, Aharon M. Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2006, 15(12): 3736-3745
- [12] Bergeaud F, Mallat S. Matching pursuit of images [C] //Proc of 1995 Int Conf on Image Processing. Piscataway, NJ: IEEE, 1995: 53-56
- [13] Mallat S, Zhang Z. Matching pursuit in a time-frequency dictionary [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1993, 14(12): 3397-3415
- [14] Zhao Ruizhen, Liu Xiaoyu, Li Ching-Chung, et al. Wavelet denoising via sparse representation [J]. Science China: Series F Information Sciences, 2009, 52(8): 1371-1377
- [15] Mairal J, Elad M, Sapiro G. Sparse representation for color image restoration [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2008, 17(1): 53-69
- [16] Li Min, Cheng Jian, Li Xiaowen, et al. Image inpainting based on non-local learned dictionary [J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2011, 33(11): 2672-2678 (in Chinese)
(李民, 程建, 李小文, 等. 非局部学习字典的图像修复 [J]. 电子与信息学报, 2011, 33(11): 2672-2678)
- [17] Yang Shuyuan, Wang Min, Chen Yiguang, et al. Single-image super-resolution reconstruction via learned geometric dictionaries and clustered sparse coding [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2012, 21(9): 4016-4028
- [18] Yang J, Wright J, Huang T, et al. Image super-resolution via sparse representation [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2010, 19(11): 2861-2873
- [19] Dong W, Zhang L, Shi G, et al. Image deblurring and super-resolution by adaptive sparse domain selection and adaptive regularization [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2011, 20(7): 1838-1857
- [20] Cai T T, Wang L. Orthogonal matching pursuit for sparse signal recovery with noise [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2011, 57(7): 4680-4688
- [21] Lorenz D A. Constructing test instances for basis pursuit denoising [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2013, 61(5): 1210-1214
- [22] Freeman W T, Pasztor E C, Carmichael O T. Learning low-level vision [C] //Proc of the 7th IEEE Int Conf on Computer Vision. Piscataway, NJ: IEEE, 1999: 1182-1189
- [23] Chang Hong, Yeung Dit-Yan, Xiong Yimin. Super-resolution through neighbor embedding [C] //Proc of the 17th IEEE Conf on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Piscataway, NJ: IEEE, 2004: 275-282
- [24] Yin Haitao, Li Shutao, Hu Jianwen. Single image super-resolution via texture constrained sparse representation [C] //Proc of the 18th IEEE Int Conf on Image Processing. Piscataway, NJ: IEEE, 2011: 1161-1164
- [25] Sun Guangling, Qin Chuan. Single image super-resolution via sparse representation in gradient domain [C] //Proc of the 3rd Int Conf on Multimedia Information Networking and Security (MINES). Piscataway, NJ: IEEE, 2011: 24-28
- [26] Battiato S, Gallo G, Stanco F. A locally adaptive zooming algorithm for digital images [J]. Image and Vision Computing, 2002, 20(11): 805-812
- [27] Rubinstein R, Bruckstein A M, Elad M. Dictionaries for sparse representation modeling [J]. Proceedings of the IEEE, 2010, 98(6): 1045-1057

- [28] Mallat S, Yu G. Super-resolution with sparse mixing estimators [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2009, 19 (11): 2889-2900
- [29] Gao Xinbo, Zhang Kaibing, Tao Dacheng, et al. Joint learning for single-image super-resolution via a coupled constraint [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2012, 21 (2): 469-480
- [30] Vidal R, Ma Y, Sastry S. Generalized principal component analysis(GPCA) [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(12): 1945-1959
- [31] Engan K, Aase S O, Hakon Husoy J. Method of optimal directions for frame design [C] //Proc of the 24th IEEE Int Conf on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Piscataway, NJ: IEEE, 1999: 2443-2446
- [32] Aharon M, Elad M, Bruckstein A. K-SVD: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2006, 54(11): 4311-4322
- [33] Li Min. Study on super-resolution reconstruction and image inpainting based on sparse representation [D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology, 2011 (in Chinese)
(李民. 基于稀疏表示的超分辨率重建和图像修复研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2011)



Dou Nuo, born in 1988. Master from Beijing Jiaotong University. Her main research interests include image processing, image reconstruction and super-resolution, sparse representation.



Zhao Ruizhen, born in 1975. PhD, professor and PhD supervisor in Beijing Jiaotong University. His main research interests include image denoising, restoration and reconstruction algorithms, image classification and recognition, compressive sensing and sparse representation, pattern recognition.



Cen Yigang, born in 1978. PhD and associate professor in Beijing Jiaotong University. His main research interests include compressive sensing, wavelet theory, wavelet neural network, image processing, signal processing(ygcen@bjtu.edu.cn).



Hu Shaohai, born in 1964. PhD and professor in Beijing Jiaotong University. His research interests include signal detection and processing, image processing, IP network and multimedia communication, artificial neural network(shhu@bjtu.edu.cn).



Zhang Yongdong, born in 1973. PhD and research fellow in the Institute of Computing Technology of Chinese Academy of Sciences. Senior member of China Computer Federation. His research interests include video search, multimedia analysis and understanding, multimedia protection, video coding and streaming media technology(zhyd@ict.ac.cn).