

面向 3D 打印体积极小的拓扑优化技术

徐文鹏^{1,2} 王伟明³ 李 航¹ 杨周旺¹ 刘秀平³ 刘利刚¹

¹(中国科学技术大学数学科学学院 合肥 230026)

²(河南理工大学计算机科学与技术学院 河南焦作 454100)

³(大连理工大学数学科学学院 辽宁大连 116023)

(wp@mail.ustc.edu.cn)

Topology Optimization for Minimal Volume in 3D Printing

Xu Wenpeng^{1,2}, Wang Weiming³, Li Hang¹, Yang Zhouwang¹, Liu Xiuping³, and Liu Ligang¹

¹(School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

²(School of Computer Science and Technology, Henan Polytechnic University, Jiaozuo, Henan 454100)

³(School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023)

Abstract Compared with the traditional products manufacturing pattern, the cost of 3D printing products is still relatively high. It is important to optimize model to reduce print material consumption and printing costs without sacrificing print quality of the object surface. To solve this problem, we present a topology optimization algorithm for minimal volume in 3D printing with traditional evolutionary structural optimization methods combined with Von Mises stress. The algorithm calculates Von Mises stress of the model to guide the evolution of the volume reducing, until the maximum Von Mises stress reaches the allowable stress value of the material. Furthermore, we introduce multi-resolution technology to accelerate optimization computing from the coarse tetrahedral meshes to fine meshes, which effectively improves the computational efficiency. Compared with other existing methods, the optimization results of our method can be more flexible and better reflect the load transfer path of model under the given force.

Key words 3D printing; topology optimization; evolutionary structural optimization; multi-resolution

摘 要 与传统制造所生产的产品相比,3D 打印产品的成本仍相对较高. 因此,如何能在不牺牲打印物体表面质量的前提下通过模型优化来减少打印材料消耗,对于降低打印成本至关重要. 针对这一问题,借鉴传统渐进结构优化方法,结合 Von Mises 应力计算,给出一种面向 3D 打印体积极小的拓扑优化算法. 该算法通过模型力学计算所得的最大 Von Mises 应力与材料允许应力之比来引导模型体积减小进化,直至最大 Von Mises 应力达到允许应力值为止. 同时,引入多分辨率技术,由粗网格再到细网格进行优化计算,有效地提高了计算效率. 与现有其他给定结构模式的方法相比,该优化结果能更好地体现模型荷载受力的传递路径.

关键词 3D 打印; 拓扑优化; 渐进结构优化; 多分辨率

中图法分类号 TP391

收稿日期:2014-10-10;修回日期:2014-11-14

基金项目:国家自然科学基金优秀青年基金项目(61222206);中国科学院“百人”计划基金项目

通信作者:刘利刚(lgliu@ustc.edu.cn)

近年来,3D 打印技术在世界各地迅猛发展并逐渐走向成熟.3D 打印又称为增材制造技术(additive manufacturing, AM),它是一种以 3D 数字模型文件为基础直接制造几乎任意形状 3D 实体的技术.3D 打印一般采用可粘合材料(液体、粉末、丝、片、板、块等)通过逐层堆叠累积的方式来制造物体^[1].相对传统的材料去除方式和材料成型方式,3D 打印是一种自下而上材料累加的制造工艺,自 20 世纪 80 年代开始逐步发展,也称为快速成型(rapid prototyping)、分层制造(layered manufacturing)等.

3D 打印可以使 3D 模型方便地输出为真实物体,同时也带来了许多新的研究问题^[2].在 3D 虚拟环境下,3D 模型可以任意摆放位置与姿势,包括可摆出各种违反重力作用的造型,因为它无需遵循真实世界中的物理规律.但是,当 3D 模型被打印输出为实物时,它必须要考虑真实世界中的各种物理规律和重力作用.如果它在各种受力情况下不能保持稳定平衡状态,就不能很好地摆放到所需的姿势.针对这一问题,Prévost 等人给出了重心优化方法^[3],即通过几何方法来优化模型的重心位置,使其在给定姿势下达到平衡状态.Bächer 等人则研究了物体旋转状态下的平衡问题^[4].同时,3D 打印技术促进了产品个性化定制的普及与推广,它将大大提高制造业的效率与灵活性,使得每个人都可以设计自己的 3D 产品模型.同时,这也会带来一些问题:许多设计结果因为其设计者缺乏一些设计经验与力学知识,可能会存在一些结构问题,如强度问题、稳定性问题等.强度不足可能会使 3D 模型在打印、运输或日常使用过程中受到破坏,而稳定性问题则会导致 3D 模型无法正常地放置或悬挂,影响其日常使用功能.这种问题我们称其为结构分析问题,它的主要任务是识别 3D 模型中存在的强度或稳定性缺陷,并给出适当合理的弥补方案.Stava 等人给出了 3 种方案来优化提高 3D 模型的结构强度^[5]:内部挖洞、局部加厚与加支撑.Zhou 等人则讨论了寻找一种最不利荷载情况(Worst-Case)的方法,并据此识别出模型上最易破坏之处或最大变形区域^[6].Telea 等人针对 3D 模型上的细长、连接结构和孔洞等特征,讨论了如何检测与评估这些特征对 3D 打印所造成的强度与打印问题^[7].

3D 打印的另一个重要问题是成本问题.目前国内外生产的塑料、光敏树脂等打印材料成本居高不下,使得 3D 打印产品的成本仍相对较高.因此,如何能在不牺牲打印物体质量的前提下,通过优化模

型来减少打印材料消耗,对于降低打印成本至关重要.对 3D 打印产品来说,其打印成本通常用打印产品所需的材料消耗来表示.因此,3D 打印材料优化问题实质是 3D 打印产品的体积优化问题,即如何优化 3D 模型内部结构,在满足力学性能要求的前提下,使其内部实心对象体积达到一定条件下的极小值.根据这些分析,可以初步给出 3D 打印的优化问题描述如下:

给定一个 3D 表面模型 S ,对其内部根据力学计算进行掏空优化,得到一个 3D 实体模型 R ,使得 R 既能满足力学强度要求,同时,它在 3D 打印时所用材料尽可能最小. R 的外表面是 S 表面的近似表示,其表示误差在一定范围内.

针对上述问题,受建筑工程中的桁架结构的启发,Wang 等人提出的一种基于“蒙皮-刚架”(Skin-Frame)的轻质结构来解决材料优化问题^[8],发表于《SIGGRAPH Asia 2013》.这种结构能有效地降低打印材料成本,并使打印物体满足所要求的物理强度、受力稳定性、自平衡性及可打印性.Lu 等人基于蜂窝结构思想提出一种模型内部掏空优化算法^[9]来解决同样问题,发表于《SIGGRAPH 2014》.该算法利用 Vornoi 图来计算定义在对象内部的不规则蜂窝状分割,并对其优化.优化结果既能保证一定的强度要求,同时能有效减少物体内部材料消耗.但是上述两种方案都是用指定结构型式如刚架、蜂窝等结构来承受模型对象的荷载受力计算,其结构优化结果会受到所采用结构型式限制,尚不能很好地实现结构几何形状与对象受力传递路线保持一致.

渐进结构拓扑优化方法(evolutionary structural optimization method, ESO)^[10-13]基于一种简单的概念,即按照一定的拓扑优化准则,把无效或者利用率低的材料从结构中一步一步删除,通过这个过程,结构逐步进化到形状或者拓扑最优.因此,从某种角度来说,在对象结构优化计算中,ESO 方法既没有指定结构形式的限制,同时又能保持优化结果与对象受力传递路线相一致,因此具有一定的优点.鉴于此原因,本文针对 3D 打印的优化问题,借鉴 ESO 方法,结合 Von Mises 应力计算来作一些初步探索.

1 面向 3D 打印体积极小的拓扑优化问题建立

传统结构拓扑优化中最常见的问题就是寻求在体积约束条件下刚度达到最大的优化.因此,在体积约束下寻求结构应变能最小的优化可以描述为

$$\begin{aligned} \min C &= \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u}, \\ \text{s. t. } V^* - \sum_{i=1}^N V_i x_i &= 0, \\ x_i &= 0 \text{ or } 1, \end{aligned} \quad (1)$$

其中, C 表示结构应变能, $\mathbf{f}$ 为荷载向量, $\mathbf{u}$ 为位移向量, V^* 为给定的体积约束. 以上问题描述在拓扑优化中广泛使用.

对 3D 打印来说, 上述问题模型要根据 3D 打印问题的特点作一些修改. 主要有以下 3 点: 1) 3D 打印对象在结构优化时主要是针对其内部来优化. 在优化时, 对象外表面应保持不变或变形控制在一定要求范围内. 2) 3D 打印优化目标应为体积极小, 而不是给定的一定体积约束. 3D 打印中人们总是期望尽可能地节省材料, 同时也能节约打印时间. 3) 3D 打印优化时通常还需要考虑其稳定性约束. 这是由 3D 打印模型的使用要求决定的, 最终 3D 打印模型必须能按照使用要求, 以某种指定的摆放状态稳定地放置或悬挂.

考虑到 3D 打印对象优化主要是对其内部进行优化, 其外表面基本保持不变; 同时, 在 3D 打印时材料都有一个最小打印厚度要求, 不妨设为 t . 因此, 为便于优化分析, 这里可将 3D 优化对象 S 分为两部分 M, M_0 : M_0 部分为具有固定厚度 h 的 3D 对象外壳, 其中 $h > t$, 这部分对象只作为参数, 不作为变量参与优化; M 部分为 S 去掉外壳 M_0 后的内部空间, 这部分对象作为优化对象来进行拓扑优化, 如图 1 所示:

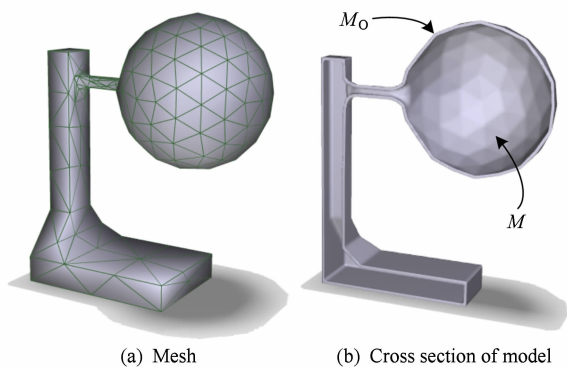


Fig. 1 Topology optimization object (Hanging ball model as an example).

图 1 优化对象(Hanging Ball 模型为例)

因此, 问题的一个优化目标即为寻求 M 的体积最小化:

$$\min Vol(M). \quad (2)$$

与传统拓扑优化相类似, 问题的另一个优化目标为在给定体积约束下, 寻求 M 结构应变能最小化:

$$\min C = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u}. \quad (3)$$

从有限元分析角度来看, 上述优化对象 M 在网格剖分后必须满足力学平衡方程:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (4)$$

其中, $\mathbf{K}$ 为整体刚度方程, $\mathbf{u}$ 为位移向量, $\mathbf{f}$ 为荷载向量.

同时, 通常情况下 3D 打印物体要求能够很好地按给定姿势摆放, 因此, 它需要满足一定的重心平衡条件, 使其重心的投影 G_{proj} 始终落在其支撑多边形 H 内部^[3], 即

$$G_{\text{proj}} \in H. \quad (5)$$

因此, 由以上分析可知, 面向 3D 打印体积极小的拓扑优化问题实质是一个多目标优化问题, 具体描述如下:

$$\begin{cases} \min Vol \ \& \ C, \\ \text{s. t. } \{(4), (5)\}, \end{cases} \quad (6)$$

其中两个优化目标中, $\min C$ 较 $\min Vol$ 优先级更高.

2 问题求解

如前所述, 传统结构拓扑优化问题一般都是给定一定体积, 通过各种算法优化计算使得刚度达到最大或柔度与应变能达到最小. 如果同时优化体积与应变能, 这使得问题会变得非常复杂. 因此, 为了求解上述问题, 求解算法主要可分为两步: 1) 给定体积下, 优化结构, 使其应变能最小, 同时计算结构单元中最大应力; 2) 优化体积, 使体积逐渐减小, 结构所有单元应力都会增大, 相应最大应力也会随之增大. 当体积减小到某个值时结构内部的最大应力达到材料的容许应力值. 这时的体积即为所求的极小体积. 整个优化过程如算法 1 所示.

算法 1. 体积极小优化算法.

输入: 一个给定的 3D 网格 M ;

输出: 体积极小优化后的 3D 实体对象 R .

1) 对 M 体素化;

2) 对 M 进行有限元计算, 得到结构对象单元中最大应力 $\sigma_{\max}$;

3) 当 $\sigma_{\max}$ 小于容许应力 $[\sigma]$, 这时 M 的体积 $Vol(M)$ 可以减小, 重复执行以下两步, 直至 $\sigma_{\max} = [\sigma]$, 这时 $Vol(M)$ 不能减小, 得到极小体积值及其对应的 3D 实体对象 R (参见 2.1 节所述);

4) 减小 $Vol(M)$, 得到一个体积值 V_i ;

5) 按 3) 所得的体积值 V_i 对 M 进行拓扑优化 (参见 2.2 节所述)。

这里,我们采用 TetGen 方法用四面体单元来对 M 进行体素化剖分^[14]。

2.1 体积进化与极小体积确定

对 3D 打印来说,人们总是希望在给定材料与荷载条件下能达到使模型打印所用材料最少,即体积最小.这个体积最小值事实上只能是一个局部极小值,很难实现理论上的最小值,这一方面是由于结构拓扑优化方法中目标函数是高度非线性函数,理论上不能找到全局最小的解,对此何函也给出了若干实例^[15];另一方面也因为 3D 打印还需考虑最小打印厚度所造成的外壳表面体积。

体积极小值的计算基于以下满应力法的假设:在结构布局 and 材料已定的情况下,使结构的每一单元至少在一组荷载的作用下承受容许应力,则此时结构重量最轻、体积最小.一个理想体积极小的结构,其结构的重要特征是各单元受力的满应力状态,即大部分内部单元的应力都达到最大容许应力。

这里每个单元的应力取值通常可以用该单元所有应力分量的某种平均来度量.对于 3D 打印来说,一般其所用材料都属各向同性材料.对各向同性材料,Von Mises 应力一直是最常用的度量准则之一.因此,这里也采用 Von Mises 应力^[16]作为各单元的应力度量:

$$\sigma_M = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]}, \quad (7)$$

其中 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 为主应力。

为了求出这个体积极小值,可以借鉴渐进优化方法中的体积进化率系数,类似地设定一个体积进化率系数 ER 来让体积逐渐减小.在体积逐渐减小过程中,各单元的 Von Mises 应力会逐渐增大,直到 Von Mises 应力增大到材料的容许应力为止,体积达到一个极小值时体积进化过程结束.具体算法描述如算法 2 所示。

算法 2. 体积进化算法。

1) 计算出所有单元 Von Mises 应力值,并从中找出最大值 $\sigma_{\max}$;

2) 判断 $\sigma_{\max}$ 是否小于容许应力 $[\sigma]$,如果是,执行下一步;否则,算法停止;

3) 按一定的体积进化率系数 ER 减小体积: $V_{k+1} = V_k(1 - ER)$ 。

事实上,容许应力 $[\sigma]$ 可以乘上一个安全比例系数 k ,一般情况下 k 可取 0.95.按 2.2 节算法,根据所得的体积值 V_{k+1} 对结构拓扑优化。

2.2 给定体积下的结构拓扑优化

对于给定体积下的结构拓扑优化问题,可以采用基于最小应变能的双向渐进优化方法 BESO 来解决.具体算法描述如算法 3 所示。

算法 3. 给定体积下 ESO 优化算法。

1) 给定 M 的体积目标 V ,对 M 进行有限元计算;

2) 根据有限元计算结果,计算 M 各单元的应变能敏度数;

3) 对 M 的各单元敏度数进行敏度过滤计算;

4) 根据各单元的应变能敏度值与目标体积 V ,增、删单元;

5) 重复 1)~4) 直至到达目标体积 V 。

由于 3D 打印结构优化问题均为 3D 结构优化问题,与 2D 结构优化相比其单元数量更多,计算更为复杂,计算量明显增加.同时,传统 ESO 方法在材料单元的增、删过程中,有限元网格固定不变.因此,如果只是简单采用传统渐进优化方法来解决,优化求解所需时间就过长,求解效率有些过低。

2.3 多分辨率技术加速求解

为了提高求解效率,加速优化计算,这里采用多分辨率技术来提高优化计算效率.即准备对象模型的不同级别细分模型,如 1~3 级细分模型,如图 2 所示为一个 hanging ball 模型的 3 级细分模型示意.之后,先在粗级别模型如 1 级模型上计算,得到一些优化结果后再将结果传递到细级别模型继续优化计算。

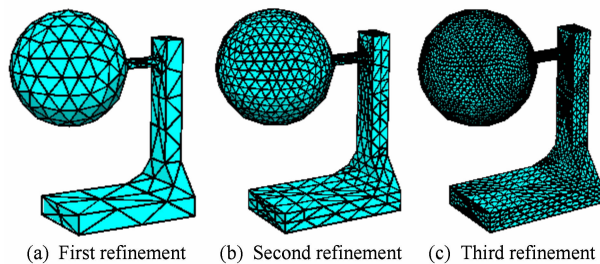


Fig. 2 Three refinement of hanging ball model.

图 2 hanging ball 模型 3 级细分

具体方法如下:

1) 首先在 M 的初始 1 级网格上进行优化计算.在优化计算循环中模型体积不断减小,单元最大应力 $\sigma_{\max}$ 不断增大,计算 $\sigma_{\max}/[\sigma] = \beta$,并将 β 称为应力比;

2) 当 β 达到一定值时优化计算转至更细级别网格上计算.同时,将上一级计算结果传递至细级别网格. β 取值在 0~1 之间,太小会导致过早细分计算,

影响计算效率;太大会导致细分计算太晚,影响优化结果精确性. 根据我们的计算分析, β 在 1 级网格时取 0.7, 在 2 级网格时取 0.9 较为合适.

上述第 2 步中的计算结果传递指的是将低分辨率网格单元的 0 或 1 值传递给细分后的网格单元. 即当细分前的四面体密度值 $x=1$ 时, 细分后的 8 个四面体也继承相应的 1 值; 当 $x=0$ 时, 同样处理.

需要指出的是这里没有考虑直接对优化后剩下的部分模型进行细分, 再继续优化计算. 主要原因是用这种方法来细分优化计算时设计空间会随着优化计算逐步缩小, 因此存在一定缺陷, 即如果在粗网格上有些单元一旦被删除将不能恢复, 所以如果发生“过删”, 结果将无法弥补. 而本文的细分方式则没有这一问题. 当在细级别网格上计算时, 由于设计区域仍为模型原有区域, 优化计算会在高敏度区域添加单元, 因此优化计算中增、删操作具有双向性.

考虑到中点细分方法具有细分规则简单、细分后四面体拓扑形状保持较好等优点, 因此这里就采用中点细分方法来对四面体单元进行细分. 在中点细分方法中, 1 个四面体单元在细分 1 次后就会分裂为 8 个四面体, 如图 3 所示:

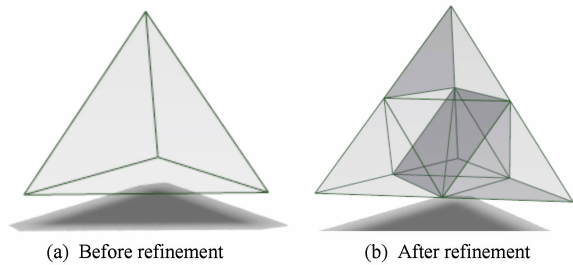


Fig. 3 Midpoint refinement method of tetrahedron.

图 3 四面体中点细分法

3 实验结果

本文优化计算由一个 3D 网格模型开始, 对其抽壳分解为一个外壳和一个内部模型, 并分别用 TetGen 方法将其四面体化; 之后, 对模型内部对象采用上述优化算法进行计算, 将计算结果与外壳部分进行合并, 得到一个整体的以四面体为体素的体素化模型. 最后, 基于 Marching Tetrahedron 方法计算提取等值面, 将体素化模型转为 3D 网格模型, 以用于 3D 打印.

我们已在 hanging ball, bunny, buddha head 等模型上测试了上述算法. 测试电脑为 Windows 操作

系统; CPU 为 Intel Core i5-3210M @2.5 GHz; 内存为 4 GB. 在具体优化算法中, 本文采用由粗网格到细网格、由低分辨率到高分辨率的加速算法, 对于提升拓扑优化计算效率有明显效果. 如图 4 即为 Bunny 模型细分计算过程示意.

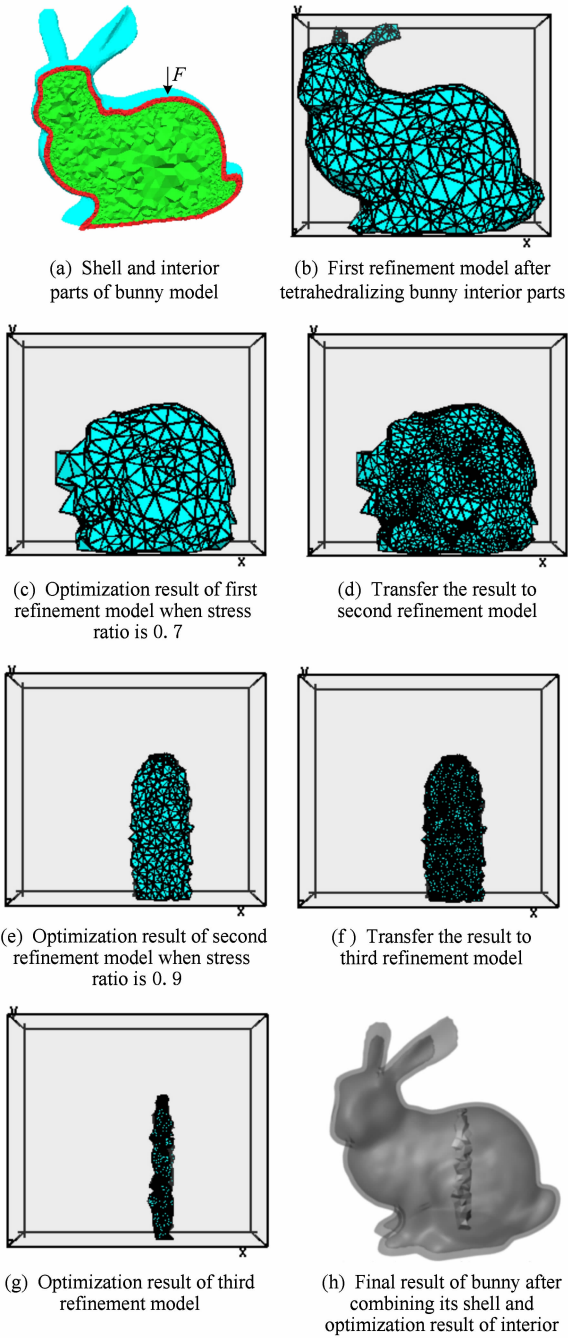


Fig. 4 Optimization procedure of bunny model.

图 4 bunny 模型优化过程

表 1 为 Bunny 模型相应的计算信息对比. 从表 1 可以看出, 采用逐步细分的加速算法计算时间合计为 4433.3 s, 与直接优化所花的时间 19421.4 s 相比, 减少约 77%.

Table 1 Comparison between Direct Optimization and Refined Optimization of Bunny Model

表 1 bunny 模型直接优化与细分优化对比

Optimization Methods	Vertex	Tetrahedron	Iteration	Computing Time/s
Direct Optimization	46 895	233 792	161	19 421. 4
First Refinement Mesh	1 128	3 653	21	47. 5
Second Refinement Mesh	6 884	29 224	27	284. 4
Third Refinement Mesh	46 895	233 792	34	4101. 4

上述 hanging ball,bunny,buddha head 等模型若高度取 150 mm、外壳厚度取 2 mm、施加外力荷载为 20 N,其有关优化体积信息如表 2 所示:

Table 2 Volume of Optimization Result

表 2 优化结果体积信息 10^4mm^3

Optimization Object	Solid Volume	Shell Volume	Interior Volume	Optimization Volume	Volume Ratio/%
hanging ball	58. 08	10. 64	0. 55	11. 19	19. 27
bunny	83. 05	13. 11	0. 71	13. 82	16. 64
buddha head	33. 99	3. 34	0. 21	3. 55	10. 44

同时,我们采用 MakeBot Replicator2 打印机打印了一些测试模型,如图 5 所示:

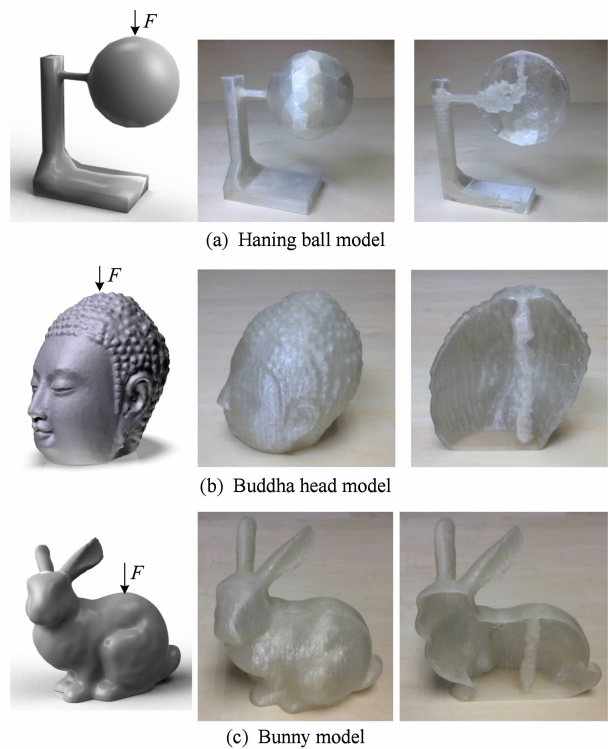


Fig. 5 3D printing of optimization result.
图 5 3D 模型优化结果打印输出

表 2 中,体积比等于优化总体积/实心体积. 从上述优化结果来看,本文算法优化结果的体积比范围为 10%~19%,而文献[8] 中对应范围为 8%~34%,文献[9]中为 25%~65%,由此可见本文算法优化能更可靠地找出受力传递路径上的单元,避免了其他不必要的受力单元.

4 总 结

本文针对 3D 打印节省材料的技术需求,结合传统结构拓扑优化中渐进结构优化方法,给出了一种面向 3D 打印体积极小的拓扑优化算法. 需指出的是这里的体积极小,并非指体积全局最小,而是一个局部极小值. 在具体优化计算过程中,本文引入不同分辨率模型,采用由粗到细、由低到高的顺序来加速计算,有效地提高了优化计算效率.

虽然本文在优化计算中采用了多分辨率技术来加速计算,但 3D 结构优化计算量较大,随着单元数量的增多,优化求解时间明显变长,因此,下一步可以考虑结合 GPU 技术来进一步加速计算. 同时,可以考虑采用等几何分析来优化计算,这时就可以直接在粗网格上计算,删去部分单元后,再对剩下的单元进行加细加密,继续优化计算,反复上述过程直至结束,实现真正意义上的多分辨率技术来优化计算,即对同一模型的不同部分采用不同的细分层次来计算.

另外,本文的优化计算需要显式给定荷载,这对有些 3D 打印模型合适,而对另外一些 3D 打印模型却并不合适. 因此,将来也可考虑结合文献[6]所给的最不利荷载计算方法对 3D 模型施加荷载,使其受力更符合真实情况,从而使优化结果更好.

参 考 文 献

[1] Chinese Society of Mechanical Engineers. 3D Printing, Printing Future [M]. Beijing: China Science and Technology Press, 2013(in Chinese)
(中国机械工程学会. 3D 打印 打印未来[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2013)

[2] Liu Ligang, Xu Wenpeng, Wang Weiming, et al. Survey on geometric computing in 3D printing [J]. Chinese Journal of Computers, 2014, 37(Online No. 10) (in Chinese)
(刘利刚, 徐文鹏, 王伟明, et al. 3D 打印中的几何计算研究进展[J]. 计算机学报, 2014, 37(在线编号 10)

[3] Prévost R, Whiting E, Lefebvre S, et al. Make it stand: Balancing shapes for 3D fabrication [J]. ACM Trans on Graphics, 2013, 32(4): 81:1-81:10

[4] Bacher M, Whiting E, Bickel B, et al. Spin-it: Optimizing moment of inertia for spinnable objects [J]. ACM Trans on Graphics, 2014, 33(4): 96:1-96:10

[5] Stava O, Vanek J, Benes B, et al. Stress relief: Improving structural strength of 3D printable objects [J]. ACM Trans on Graphics, 2012, 31(4): 48:1-48:11

[6] Zhou Q, Panetta J, Zorin D. Worst-case structural analysis [J]. ACM Trans on Graphics, 2013, 32(4): 137:1-137:12

[7] Telea A, Jalba A. Voxel-based assessment of printability of 3d shapes [C] //Proc of the 10th Int Conf on Mathematical Morphology and Its Applications to Image and Signal Processing. Berlin: Springer, 2011: 393-404

[8] Wang W, Wang T Y, Yang Z, et al. Cost-effective printing of 3D objects with skin-frame structures [J]. ACM Trans on Graphics, 2013, 32(6): 177:1-177:10

[9] Lu L, Sharf A, Zhao H, et al. Build-to-last: Strength to weight 3D printed objects [J]. ACM Trans on Graphics, 2014, 33(4): 97:1-97:10

[10] Xie Y M, Steven G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization [J]. Computers & Structures, 1993, 49(5): 885-896

[11] Chu D N, Xie Y M, Hira A, et al. Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 1996, 21(4): 239-251

[12] Querin O M, Steven G P, Xie Y M. Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm [J]. Engineering Computations, 1998, 15(8): 1031-1048

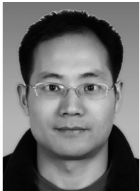
[13] Tanskanen P. The evolutionary structural optimization method: Theoretical aspects [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, 191(47): 5485-5498

[14] Si H. A quality tetrahedral mesh generator and three-dimensional delaunay triangulator [EB/OL]. 2006 [2014-08-10]. <http://wias-berlin.de/software/tetgen/>

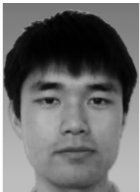
[15] He Han. Research on the validity of ESO method based on Von Mises stress [D]. Chongqing: Chongqing University, 2012 (in Chinese)
(何函. 基于 Von Mises 应力的 ESO 方法有效性研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2012)

[16] Zhuang Chungang, Xiong Zhenhua, Ding Han. Structural topology optimization based on level set method and Von Mises stress [J]. China Mechanical Engineering, 2006, (15): 1589-1595 (in Chinese)

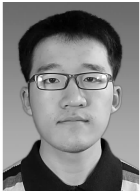
(庄春刚, 熊振华, 丁汉. 基于水平集方法和 Von Mises 应力的结构拓扑优化[J]. 中国机械工程, 2006, (15): 1589-1595)



Xu Wenpeng, born in 1976. PhD candidate, associate professor. His main research interests include computer graphics and digital geometry processing.



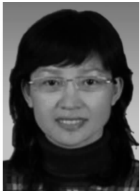
Wang Weiming, born in 1986. PhD candidate. His main research interests include computer graphics and computational geometry (wwmdlut@gmail.com).



Li Hang, born in 1993. Undergraduate student. His main research interests include computer graphics and image processing (lihang49@mail.ustc.edu.cn).



Yang Zhouwang, born in 1974. PhD, associate professor. His main research interests include geometric modeling and processing, optimization theory and algorithms (yangzw@ustc.edu.cn).



Liu Xiuping, born in 1964. PhD, professor. Her main research interests include digital geometry processing and computational geometry (xpliu@dlut.edu.cn).



Liu Ligang, born in 1975. PhD, professor. His main research interests include geometric processing, computer graphics, and image processing.