

# 几何展开与折叠算法及应用综述

孙晓鹏<sup>1,2</sup> 刘诗涵<sup>1</sup> 王振燕<sup>1</sup> 李娇娇<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(辽宁师范大学计算机与信息技术学院计算机系统研究所 辽宁大连 116029)

<sup>2</sup>(智能通信软件与多媒体北京市重点实验室(北京邮电大学) 北京 100876)

(cadcg2008@hotmail.com)

## Survey on Geometric Unfolding, Folding Algorithms and Applications

Sun Xiaopeng<sup>1,2</sup>, Liu Shihan<sup>1</sup>, Wang Zhenyan<sup>1</sup>, and Li Jiaojiao<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(*Institute of Computer System, Department of Computer and Information Technology, Liaoning Normal University, Dalian, Liaoning 116029*)

<sup>2</sup>(*Beijing Key Laboratory of Intelligent Telecommunications Software and Multimedia (Beijing University of Posts and Telecommunications), Beijing 100876*)

**Abstract** Unfolding and folding problem is a popular research topic in computer graphics, and has a wide range of applications, such as industrial manufacturing, architectural design, medical treatment, and aviation technology. In this survey, we review the basic concepts of unfolding and folding problem, introduce the research and application in four fields: robot design, computer animation, deep learning and others. We discuss the research work of unfolding and folding problem in detail. First, according to the different degrees of unfolding, we summarize research progress and typical algorithm ideas from two aspects: full unfolding and approximate unfolding. Full unfolding is to unfold 3D objects into 2D space without overlapping and deformation. However, most objects cannot be directly unfolded, and only an approximately unfolded structure can be solved. Approximate unfolding is a non-overlapping and deformed process, which is unfolded into the plane domain by mapping. How to find the smallest deformation is the key to approximate unfolding. Second, according to the different folding forms, the folding problem is divided into two types: Origami and Kirigami. We divide Origami into rigid folding and curved folding according to the different forms of crease, such as straight crease and curved crease. Kirigami is a special folding method that combines cutting and folding technology, which drives folding by the elastic force or other external forces generated by cutting. Here, we mainly consider the technology or algorithm of using Kirigami technology to construct auxetic structures. In addition, in order to compare the advantages and disadvantages of the algorithm, we summarize the commonly used algorithm indicators of unfolding and folding algorithm. Then, we evaluate the typical algorithm in recent years, and analyze advantages and disadvantages. Finally, we summarize and propose the development trend of unfolding and folding, including algorithm accuracy and robustness, fold volumetric objects, self-driven process and intelligent application of Kirigami technology.

**Key words** unfolding algorithm; folding algorithm; robot design; animation simulation; deep learning

收稿日期:2020-03-02;修回日期:2020-06-19

基金项目:国家自然科学基金项目(61472170);北京邮电大学智能通信软件与多媒体北京市重点实验室开放课题(ITSM201301)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (61472170) and the Open Project of Beijing Key Laboratory of Intelligent Telecommunications Software and Multimedia (Beijing University of Posts and Telecommunications) (ITSM201301).

**摘要** 展开与折叠是计算机图形学中的重要研究问题,已经广泛应用于工业制造、建筑设计、医学治疗和航空航天等方面.通过回顾近年来图形学中展开与折叠方面的主要研究问题,总结整理它们的典型算法.首先介绍展开与折叠的基本概念,并从机器人设计、计算机动画、深度学习和其他4个领域介绍它们的应用情况.之后,按照展开程度分类,从完全展开和近似展开2方面总结展开问题的研究进展和典型算法思想;按照折叠形式不同,将折叠问题分为 Origami 折叠和 Kirigami 折叠2类,分别论述其研究进展并总结算法思路.之后,整理展开与折叠的评价指标,总结各类展开与折叠算法的特点,并分析比较它们的优势与不足.最后,总结并提出展开与折叠的4个发展趋势.

**关键词** 展开算法;折叠算法;机器人设计;动画模拟;深度学习

**中图法分类号** TP391.4

展开与折叠是计算机图形学领域的经典问题之一,是相互对立的2个过程.一般情况下,展开以结构化的状态作为初始状态,以无组织的状态作为终端状态,而折叠与之相反.展开与折叠中的几何处理思想为设计类问题提供解决方法,并广泛应用于工业、建筑、医疗和航天科技等领域.

展开是将3维结构切割成平面集合的过程.通常情况下,若沿3维结构的网格边缘切割,可以将其完全展开.这类问题的关键在于如何找到3维结构的无重叠平面网结构.然而,对于难以完全展开的复杂模型,如非凸多面体等,可以采用映射方式将其近似展开.近似展开问题的关键是如何最小化失真度量,即在变形影响最小的情况下,将3维模型映射到平面域中.本文根据展开程度不同,将展开问题分为完全展开和近似展开2个部分论述.

折叠是2种结构间的连续运动过程.本文根据折叠形式的不同,将折叠分为 Origami 折叠和 Kirigami 折叠2类.其中,Origami 折叠仅根据平面折痕折叠,可分为刚性折叠(直折痕)和弯曲折叠(曲线折痕);而 Kirigami 折叠是先将平面切割,后利用

切割产生的弹力或外力驱动折叠.

本文对展开与折叠问题进行系统的研究与阐述,主要贡献有5个方面:1)整理展开与折叠算法的基本概念,并从机器人设计、计算机动画、深度学习和其他4个领域介绍展开与折叠问题的应用情况;2)根据展开程度的不同,从完全展开和近似展开2个方面讨论展开算法的研究进展,分析并讨论其优缺点;3)根据折叠形式不同,从 Origami 折叠和 Kirigami 折叠2个方面讨论折叠算法的研究进展,并分析讨论其优势与不足;4)总结展开与折叠算法的评估准则,并对典型的展开与折叠算法进行分析和比较;5)总结并提出展开与折叠方向的4个发展趋势.

## 1 基本概念及应用情况

通过分类与整理展开和折叠相关文献,本文根据展开程度不同,将展开问题分为完全展开和近似展开;根据折叠形式不同,将折叠问题分为 Origami 折叠和 Kirigami 折叠2类,如图1所示.本节分别对

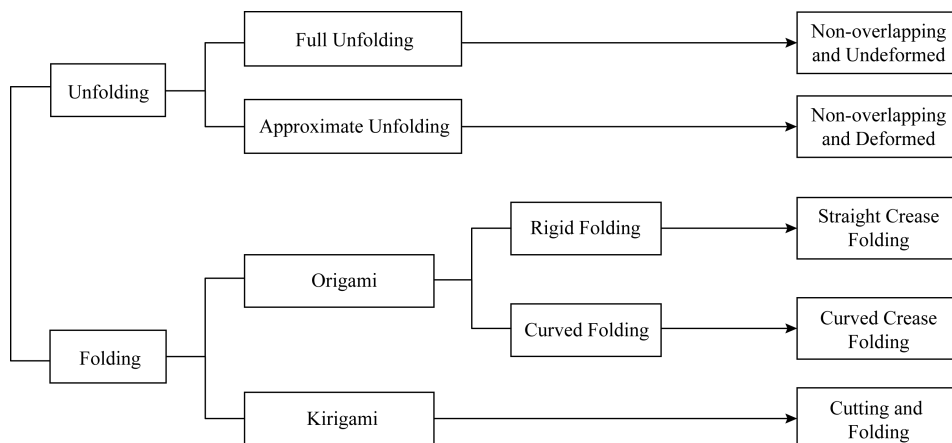


Fig. 1 Unfolding and folding classification

图1 展开与折叠分类图

它们的基本概念进行整理和总结.此外,从机器人设计、计算机动画、深度学习和其他 4 个领域介绍展开与折叠的应用情况.

### 1.1 展开

本文根据展开程度不同,从完全展开和近似展开 2 个部分介绍.

完全展开能够将 3 维结构无重叠、无变形地展开到 2 维空间,形成多面体网结构.完全展开的切割条件通常限制在多面体网格的边上(非必须条件),即边展开.此外,基于最短路径的源展开和星展开方法也是常用方法之一.Demaine<sup>[1]</sup>介绍启发式 3 维结构展开算法,但仍存在一定问题,例如最陡边缘展开算法虽然能展开多面体,但部分情况未能避免重叠.

由于大多数曲面是不可完全展开的,因此只能通过寻找近似的展开结构求解问题.近似展开方法确保 3 维结构在无拉伸的条件下被切割和展开到平面中.曲面可展的充要条件是曲面上任意点的高斯曲率为 0,这一条件成为许多网格曲面展开方法的基础.例如,保角映射方法通过消除角度失真,确保 3 维曲面在无拉伸的情况下展开.此外,为减小保角映射过程中的面积失真,部分文献[2-3]采用添加锥奇点的方式将 3 维结构映射到规则多面体上,如正方体、六面体等,再进行完全展开.

### 1.2 折叠

本文根据折叠形式不同,从 Origami 折叠和 Kirigami 折叠 2 个角度介绍.

Origami 折叠是沿折痕折叠的形式.根据折痕分类,Origami 折叠又分为刚性折叠和弯折折叠.其中,刚性折叠沿直折痕折叠,其形变只发生在折痕处,其他位置不发生拉伸或扭曲;而弯折折叠沿曲线折痕折叠,曲线折痕连接的 2 个面需要弯曲以适应折叠运动,因此弯折折叠不能简化为计算顶点坐标的问题,其弯曲刚度也是重要参数.

Kirigami 折叠是将切割与折叠结合的形式,可应用在建筑设计<sup>[4]</sup>和工业设计<sup>[5]</sup>中.应用 Kirigami

折叠技术制造的晶格结构<sup>[6-7]</sup>、可拉伸结构<sup>[8]</sup>、纳米结构<sup>[9-10]</sup>以及拉胀结构<sup>[11]</sup>得到广泛关注.其中,由 Kirigami 制成的拉胀结构大多是由铰链连接的旋转单元构成,旋转单元为平面切割而成的刚性几何结构(通常为正方形或等边三角形).当拉伸或收缩时,旋转单元围绕铰链旋转以使整体结构变形,而旋转单元本身不发生形变.在变形过程中,拉胀结构表现出的负泊松比变化,称为结构的拉胀行为<sup>[12]</sup>.

### 1.3 应用情况

本文从机器人设计领域、计算机动画领域、机器学习领域以及其他领域 4 个角度出发,介绍展开和折叠的应用情况.

#### 1.3.1 机器人设计领域

在机器人设计领域中,折叠机器人具有柔软性,其形态、功能或驱动方式通过折叠产生,能适应各种环境,满足应用中对于灵活性和健壮性需求.

2017 年,Miyashita 等人<sup>[13]</sup>提出通过自折叠“外骨骼”变形方法扩展和改变机器人功能.“外骨骼”为长方形薄片,在运动过程中利用预拉伸热收缩聚合物薄膜的拉伸应力实现自折叠.相较于固定架构的机器人,自折叠“外骨骼”机器人操作更灵活,可应用在空间制造、无切口医疗、深海建设和现场救援等场景中.

2017 年,Li 等人<sup>[14]</sup>结合折纸思想,提出由流体驱动的人工肌肉结构(fluid-driven origami-inspired artificial muscles, FOAMs).FOAMs 由柔性皮肤膜、可压缩实体骨架和流体介质构成.在内部流体与外部间的压强差作用下,皮肤膜驱动收缩:当缩小内部流体体积,即在负压下,压强差  $\Delta p$  会使皮肤膜弯曲,推动 FOAMs 收缩变形.表 1 对折叠驱动的人工肌肉结构(pleated pneumatic artificial muscles, PAMs)、真空驱动的人工肌肉结构(vacuum-actuated muscle-inspired pneumatic structures, VAMPs)、FOAMs 进行对比总结.与正压差驱动对比,负压差的驱动方式更安全.

Table 1 Comparison of Fluid-Driven Artificial Muscles

表 1 流体驱动的人工肌肉对比

Driven Device	Pressure Difference $\Delta p$	Maximum Stress/kPa	Maximum Contraction/%	Features	Reference
FOAMs	$\Delta p < 0$	600	90	Zigzag Origami, Fast and Efficient	Ref [14]
PAMs	$\Delta p > 0$		45-50	Gas or High-pressure Liquid Drive, Linear Contraction	Ref [15]
VAMPs	$\Delta p < 0$	65	45	Linear Contraction and Torsional Motion, Limited by Buckling of Negative Pressure and Elastic Structure	Ref [16]

2018年,Rus等人<sup>[17]</sup>将折叠技术与智能材料结合,设计折纸机器人,并采用3D,4D打印等方法制造.与传统机器人相比,折纸机器人能够通过折叠进行变形或连续驱动,在特定的环境下能够实现灵活自主的移动与操作.

2019年,Li等人<sup>[18]</sup>利用折纸技术设计软抓取器,提出具有抓取功能的软机器人制造及真空驱动方法.如图2所示,软抓取器为轻质量空心半球状水弹结构,通过引入FOAMs方法<sup>[14]</sup>驱动,实现抓取操作.与刚性抓取器相比,软抓取器具有强大的抓取力(在-60 kPa下保持高达120N的载荷,超过自重的120倍)和健壮性(允许在40%的轴向偏移处抓取).

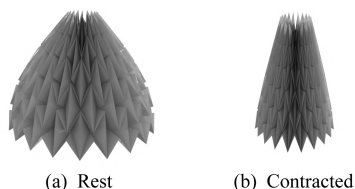


Fig. 2 Soft grabber of waterbomb structure<sup>[18]</sup>

图2 水弹结构的软抓取器<sup>[18]</sup>

### 1.3.2 计算机动画领域

模拟是计算机动画领域的重要问题之一.只有捕捉悬垂、折叠、起皱、拉伸等细微元素,才能提高电脑模拟时的真实感.2003年,Bridson等人<sup>[19]</sup>提出将数字替身所穿服装与现实中服装匹配方法,用于保留并处理在布料模拟中的褶皱形态.

2010年,Rohmer等人<sup>[20]</sup>将粗布动画与后处理步骤结合,生成精细的动态皱纹.该方法允许用户在不同织物上模拟.除用户控制的参数外,其余为全自动过程.但是,尽管该方法保留褶皱的形状,却不能保证创建的曲面是可展的.

2013年,Narain等人<sup>[21]</sup>提出模拟纸、金属凹痕、布等薄板材料的塑性变形方法,通过使用自适应网格框架,将网格的边与褶皱或折痕动态对齐.该框架能够对尖锐特征进行有效的建模,并避免由于平面刚性行为而无法弯曲的问题.

2015年,Patkar等人<sup>[22]</sup>提出尖锐折痕弯曲单元,既可在布料或纸张中创建褶皱,还可以用于在体积对象中创建类似的屈曲.其关键思想是利用弯曲弹簧模拟分割,使用虚拟节点算法切割对象后,使相邻面片只围绕切割旋转或弯曲,并利用前稳定和后稳定方法添加约束条件.

2018年,Li等人<sup>[23]</sup>提出FoldSketch算法,通过物理模拟布料,保证输出结果的物理合理性,首次实

现基于草图的褶皱设计.然而,该方法并不能生成复杂褶皱,如在特殊材质或需要缝合的布料上模拟.

2018年,Feng等人<sup>[24]</sup>提出光滑粒子流体(smoothed-particle hydrodynamics, SPH)形变约束方法,以保持流体模拟中的细节.该方法将输入模型分为源对象和目标对象,分别采用体素化方法采样以生成源控制粒子和目标控制粒子;之后进行约束变形.该方法具有快速性和健壮性,适合交互应用.

2019年,Liu等人<sup>[25]</sup>利用可变形物体的不均匀性计算不同区域特性,增加结果的真实感.此外,通过组合浮力、压力、粘性力和弹性力,设计计算框架,保留更多细节.

### 1.3.3 深度学习领域

高度复杂和非凸的模型存在具有无碰撞路径的多面体网结构.深度学习方法可通过训练节点自由度(degree of freedom, DOF)、切割长度或展开面积等拓扑特征,快速找到低成本的有效折叠或展开路径.2014年,Zhou等人<sup>[26]</sup>提出利用连续折叠序列将3维物体转换为立方体或长方体的方法,主要包含体素化、树拟合和交互折叠3个步骤:1)体素化过程主要寻找减少小块体素数量的分割方式;2)树拟合过程使用束搜索和模拟退火算法寻找使能量函数最小化的关节类型和位置;3)交互折叠过程使用物理模拟器来展开输入形状和目标形状,验证折叠过程是否无碰撞.

2016年,Xi等人<sup>[27]</sup>提出自动折叠方法,即通过学习自展开方法,同时展开和分割给定的3维网格.其关键思想是从失败的展开中学习算法,通过提供语义,减少分割数量,使折叠更加容易.

2018年,Hao等人<sup>[28]</sup>提出线性可折叠多面体网创建方法,也是具有线性无碰撞折叠路径的展开方法.首先将多面体网映射到低维特征空间 $X$ 中,评估 $X$ 中每个点的可折叠性;之后根据拓扑特征构造适应度函数,通过展开器 $f'$ 生成不重叠展开网 $N$ <sup>[28]</sup>:

$$f' = \begin{cases} f, & \text{if } N \text{ is invalid,} \\ \beta + \hat{f}(x_i), & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (1)$$

其中,先通过 $f = -(\lambda_0 \delta_0 + \lambda_1 \delta_1)$ 生成无重叠的有效展开后( $\delta_0$ 为 $N$ 中的重叠数量, $\delta_1$ 是导致 $N$ 中局部重叠的双曲线顶点数, $\lambda_0$ 和 $\lambda_1$ 为参数),再通过 $\hat{f}(x_i)$ 演化展开网, $x_i$ 表示 $X$ 的量化特征, $\beta$ 为常量,确保 $\beta + \hat{f}(x_i) > 0 \geq f$ ;最后,采用协方差矩阵适应进化策略算法<sup>[29]</sup>优化适应度函数,使用展开

器  $f'$  迭代评估最优解.对于简单模型,该算法通常只需要 20 次迭代,而对于高度复杂模型,同样能即时完成.

### 1.3.4 其他领域

可弹出结构设计常应用在立体纸雕或立体书的设计中.对于常用结构,如 V-Fold 结构,必须满足的性质<sup>[30]</sup>有:在不撕裂或引入新折痕的前提下,结构可以关闭到平面上,且每次弹出都生成相同形状;贴片在关闭和弹出过程中保持刚性;不相连的贴片在关闭或弹出时不相交.表 2 总结 6 种可弹出结构设计的研究和工作内容.

**Table 2 The Application of Pop-up Structure**

**表 2 可弹出结构的应用介绍**

Reference	Publication Year	Main Content
Ref [31-32]	2002	V-Fold Structure Simulation
Ref [33]	2004	Parallel Structure Simulation
Ref [34]	2010	Generate a Flat Layout
Ref [30]	2012	Analyze the Conditions of V-Fold Structure
Ref [35]	2014	Automatically Generate Multi-Style Designs
Ref [36]	2018	Transformation Between 2D structures

Li 等人<sup>[37]</sup>将折叠问题应用到家具设计中,即通过在分段刚性的部件上插入铰链,折叠收缩家具,节省存放空间.该方法在 36 个不同类型的家具模型上测试,除专门设计的可伸缩性测试模型外,大多数模型都可折叠收缩,具有较好的健壮性.

计忠平等人<sup>[38]</sup>和张世学等人<sup>[39]</sup>利用边折叠技术进行模型简化工作:文献[38]通过半边折叠简化网格并保留网格细节特征,不仅运行速度快,而且存储量小;文献[39]使用变形距离模拟模型的变形程度,并使用基于二次误差度量的累加边折叠代价简化模型,易于输出高效模型.

## 2 展开算法研究进展

本节根据展开程度分类,从完全展开和近似展开 2 个方面论述展开算法的研究进展,并对典型算法的主要工作、算法思想及优缺点进行总结.

### 2.1 完全展开

2008 年,Miller 等人<sup>[40]</sup>对凸多面体进行研究:若  $P_b$  为  $d+1$  维的凸多面体边界,该方法证明  $P_b$  到  $\mathbb{R}^d$  空间中存在单一非重叠展开多面体网.此外,

他们还提出凸多面体边界上的最短路径数猜想,用于连续展开凸多面体.2010 年,Ito 等人<sup>[41]</sup>将星展开概念扩展到多边形闭合曲线  $Q_c$  中:将任意凸多面体  $P$  的表面展开成简单不重叠的平面多边形,只需沿着  $P$  到  $Q_c$  中每个顶点的最短路径进行分割.2011 年,Demaine 等人<sup>[42]</sup>研究任意凸多面体单一非重叠平面形式展开方法,包含 2 步:使用源展开方法连续展开凸多面体;细化凸多面体的展开部分,并使用蛇形展开算法生成更为连续的平面展开形式.

2011 年,Takahashi 等人<sup>[43]</sup>提出三角形非凸多面体网格展开算法:通过计算曲面曲率,将网格顶点分为双曲线顶点和椭圆顶点,并使用基于遗传的方法搜索自适应采样网格展开.该方法无需将 3 维网格展开到平面上,便可检索局部自交情况,加快对无重叠单连通展开速度.

2015 年,Xi 等人<sup>[44]</sup>将多面体建模为多连杆树结构,并在离散域中采样,解决连续展开多面体问题.多连杆树结构的铰链为展开结构中的共享边,折叠角为铰链处二面角的补角.设多连杆树当前结构  $C = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ ,初始结构  $S = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n\}$  和目标结构  $G = \{0, 0, \dots, 0\}$ , $\theta$  和  $\rho$  分别为当前结构和初始结构的折叠角.通过线性插值初始空路径图  $R$ ,判断生成的中间结构  $C$  是否能直接连接初始结构  $S$  和目标结构  $G$ ;若可连接,则找到有效展开路径,反之使用离散采样器采样折叠角的完全展开状态、目标状态以及完全折叠状态  $\{0, \rho_i, \pi\}$ ,并通过连接器添加到  $R$  中,若  $R$  中的路径有效,则找到展开路径,否则再次采样,直到找到有效路径.文献[44]比较连续采样器与离散采样器生成有效结构的能力:连续采样器在 7DOF 空间中有效率为 38% 左右,而离散采样器的有效率超过 70%;在 43DOF 的空间中,连续采样器的有效率为 0.06%,而离散采样器为 58%,说明离散采样器具有高效性.但是,对于大型非凸多面体,若  $S$  和  $G$  不能线性连接,则很难生成有效的展开路径.

在完全展开算法中,文献[40-42]主要计算凸多面体的单一非重叠展开,其中,文献[40,42]使用源展开方法,文献[41]使用改进的星展开方法.文献[43-44]主要针对非凸多面体展开,但文献[43]通过遗传方法优化展开的贴片数量,即展开图案不单一;而文献[44]通过离散采样找到有效的展开路径,但无法计算非线性连接的非凸多面体.

### 2.2 近似展开

2003 年,陈动人等人<sup>[45]</sup>利用伪直母线对拓扑

结构复杂的曲面结构进行自适应分片展开,大幅度提高展开质量.2006年,Kharevych等人<sup>[46]</sup>提出基于圆模式的离散保角映射展开算法,通过求解每个三角面片外接圆的半径以及各个外接圆之间的交角,确定平面展开布局.该算法可以控制映射的边界形状,具有健壮性.2007年,Zayer等人<sup>[47]</sup>使用角度误差估计方法,首次提出保角映射的线性算法.2008年,Mullen等人<sup>[48]</sup>通过求解包含稀疏对称矩阵的广义特征值问题的最大特征值,最小化离散加权保角映射能量,计算展开结果.2012年,文献[3]提出全局保角映射展开算法,通过确定圆锥位置和角度,展平曲面.

2017年,Sawhney等人<sup>[49]</sup>提出控制目标形状边界的保角映射线性展开算法(boundary first flattening, BFF),包括最优面积失真自动展开、控制边界长度或角度展开、保存尖锐角展开、无缝圆锥映射展开、均匀展开和指定目标形状展开6种. BFF算法将保角映射表示为共轭调和函数,并通过Cherrier公式和1对Poincaré共轭调和函数展开算子构造边界数据(保角缩放因子 $u$ 或边界顶点外角 $\epsilon$ ),之后将映射扩展到平面域的内部,使用Hilbert变换求解共轭问题,得到展开结构.相比于其他控制边界保角映射展开算法<sup>[46]</sup>,BFF算法的计算速度快50倍左右.然而BFF算法只关注欧几里得域,而非离散域.

2018年,Soliman等人<sup>[50]</sup>提出添加锥奇点(锥数量、大小和位置)的最小失真(minimal area distortion, MAD)展开算法,包括最小总面积失真展开、控制锥位置并惩罚失真区域展开、计算最优边界形状展开和控制锥角范围展开4种. MAD算法的根本目标是在输入模型 $M$ (若有边界记为 $M_b$ )上找到1组锥点 $p_m \in M$ 和相应的锥角 $\theta_m \in \mathbb{R}$ ,使展开后的面积失真最小,即<sup>[50]</sup>:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } E_M(u), & (2) \\ & p_m \in M, \theta_m \in \mathbb{R} \\ \text{s.t. } & \Delta u = K - \sum_m \theta_m \delta_{p_m}, \text{ in } M, \\ & u = 0, \text{ on } M_b, \end{aligned}$$

其中,能量 $E_M$ 测量面积失真, $u$ 为保角缩放因子, $\Delta$ 是拉普拉斯算子, $K$ 为初始高斯曲率, $\delta_p$ 表示 $p$ 的Dirac delta度量. MAD算法只需求解50~100个线性系统,且不依赖模型分辨率,无论使用均匀还是可变密度的网格,都能用少量的锥计算,具有良好的健壮性.但是,文献[50]并未考虑量化角度的最优锥构型问题(例如,锥角设置为 $\pi/2$ 的整数倍).

2018年,Sharp等人<sup>[51]</sup>提出全局变分展开算法.不同于显式参数化曲面算法,该算法通过定义切割曲线 $\gamma$ 的演化方程,直接优化切割和展开过程中的变形<sup>[51]</sup>:

$$\frac{d}{dt}\gamma = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 n, \quad (3)$$

其中, $n$ 是曲线 $\gamma$ 的单位法线, $u$ 是保角缩放因子.该算法对于初始切割线的依赖性小,具有较好的健壮性.虽然在平滑条件中不会出现多个分割区域合并或单个区域一分为二的情况,但会产生较窄的区域,在离散条件下可能会出现夹点.

对于近似展开算法,文献[45]通过伪直母线展开曲面,却无法控制展开的边界形状;文献[3, 46-47, 49-51]通过保角映射寻找近似展开结构,确保展开过程中的面积失真最小.其中,文献[46-47, 49]可以控制展开边界形状,但文献[46-47]无法控制边界长度,而文献[49]既可控制边界长度,也可控制边界角度.此外,文献[49-50]使用参数化方法展开曲面,而文献[51]仅通过优化切割曲线方程寻找最优切割路径.

### 3 折叠算法研究进展

本节根据折叠形式的不同,从Kirigami折叠和Origami折叠2个方面介绍折叠算法研究进展.总结它们的主要工作、算法思想并讨论其优势与不足.

#### 3.1 Origami 折叠

本节对Origami折叠的相关文献进行整理,按照折痕形式将Origami折叠分为刚性折叠和弯曲折叠.同时总结其中典型文献的主要算法和优缺点.

##### 3.1.1 刚性折叠

2010年,Tachi<sup>[52]</sup>提出2维纸结构在无切割、无拉伸条件下折叠成3维目标结构的逆设计算法,其关键在于将3维折纸问题转化为在平面上布置多边形的问题,之后通过插入折合分子连接相邻的多边形(折合分子隐藏在可见表面后面),如图3所示.此

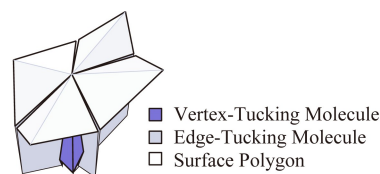


Fig. 3 The folding molecules are hidden behind the surface<sup>[52]</sup>

图3 折合分子隐藏到曲面后<sup>[52]</sup>

外,通过构造有效折痕图案所需的等式和不等式条件,提出基于2步映射和边缘分割的算法.但是,该算法并不适用于任意模型.

2015年,Chen等人<sup>[53]</sup>提出厚板结构刚性折叠方法,根据零厚度刚性折叠结构设计的2维折痕图案,实现零厚度与非零厚度材料间的等效运动.零厚度刚性折叠运动可看作是球面连杆结构运动,折痕看作为旋转关节 $J$ ,以折痕为界的面看作为连杆.非零厚度刚性折叠运动通过实现与零厚度的球面连杆结果相同的运动条件(折痕排列及折叠角度),完成折叠过程.4折痕图案存在1个空间4 $J$ 连杆;而5折痕和6折痕图案包含2DOF或3DOF,但其对应的非零厚度材料是空间过约束Bricard连杆结构,只有1DOF.因此若要实现5折痕和6折痕零厚度折叠与非零厚度折叠之间运动的等效,需要通过对称或其他方式降低前者的自由度.

2016年,Chen等人<sup>[54]</sup>分析6折痕水弹折叠问题及其非零厚度折叠运动.如图4所示,6折痕水弹图案包含2类顶点:顶点 $D$ (4条谷折痕、2条山折痕)、顶点 $W$ (2条谷折痕、4条山折痕).文献<sup>[54]</sup>证明,在通常情况下,具有顶点 $D$ 和顶点 $W$ 的折叠图案存在2种不同的折叠方式,但是在折叠过程中可能会出现2级运动或阻塞情况.

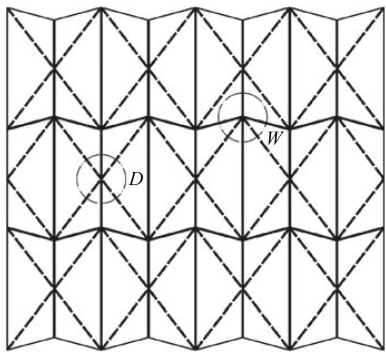


Fig. 4 Six fold waterbomb pattern vertex  $D$  and vertex  $W$  <sup>[54]</sup>

图4 6折痕水弹图案顶点 $D$ 及顶点 $W$  <sup>[54]</sup>

与零厚度折叠相比,非零厚度折叠的优点在于:1)非零厚度折叠结构是仅具有1DOF的过约束Bricard连杆结构,不需要其他约束保持运动的对称性;2)零厚度折叠运动具有奇异性,而非零厚度折叠运动只有在特定厚度下才会出现2条路径,有利于工程应用.

对于刚性折叠方法,文献<sup>[52]</sup>通过引入折合分子,无分割和撕裂地折叠零厚度平面结构;文献<sup>[53-</sup>

54]主要研究零厚度结构与非零厚度结构间的运动关系:文献<sup>[54]</sup>在文献<sup>[53]</sup>的基础上,总结零厚度结构与非零厚度结构的折叠路径及折叠条件.

### 3.1.2 弯曲折叠

2012年,Solomon等人<sup>[55]</sup>将离散可展曲面看作是在无撕扯或粘合条件下折叠的纸结构,提出离散可展曲面交互建模方法.为确保每个模型对应唯一的离散可展曲面,需要满足3种约束条件:几何约束、兼容性约束和附加约束.

2016年,Tang等人<sup>[56]</sup>提出可展曲面建模和折痕设计算法.该算法通过样条曲线近似用点云表示的参考模型,并通过分段可展的方法生成水密复合的可展曲面.首先,通过将平面局部拟合到点云上,计算参考形状的剩余点 $q_j$ 中的法向量 $m_j$ ;之后线性插值样条曲线 $a, b$ ,得到条带 $\varphi$ 的曲面 $s$ ;最后使用引导投影算法将 $q_j$ 投影到可展曲面 $s$ 上.该算法适用于任意复杂的可展曲面:对于参考形状中的区域 $\psi_1, \psi_2, \dots$ 分别用条带 $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ 近似,之后合并条带 $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ 并在边界处添加近似约束,形成水密曲面.然而,该算法的区域是用户定义的,因此并未解决最佳布局问题,也未考虑到连续近似和重叠问题.

2017年,Kilian等人<sup>[57]</sup>提出弦驱动的折叠算法,解决在等距变形空间中局部表示折叠路径以驱动折叠的问题,简化弯曲曲面的折叠运动过程.该算法先计算2维折痕图案的折叠运动,后计算在拉力驱动下产生相同折叠序列的弦网络.但是,该算法只适用于在拉力作用下折叠而成的曲面结构,对于其他力荷载下成形的曲面结构无效.

2017年,Guseinov等人<sup>[58]</sup>提出利用弹力驱动曲率变化的壳结构设计算法(CurveUps),将含有预弹性力的薄膜覆盖在硬质体结构上,当释放弹力时,体结构相互碰撞挤压,迫使整体趋近于3维目标结构.算法通过2步优化,生成2维的硬质体结构布局:1)全局优化,定义软约束表示结构的期望特性,定义硬约束用于捕获制造和驱动限制;2)局部优化,利用弹力对模型参数的局部依赖性解决体结构间的无效碰撞.由于相邻体结构间的局部可压缩性和二面角约束影响,该算法并不适用于任意模型.

对于弯曲折叠,文献<sup>[56-58]</sup>皆用于构建3维结构,但文献<sup>[56]</sup>仅适用于可展曲面,文献<sup>[57]</sup>仅适用于拉力成型的3维结构,而文献<sup>[58]</sup>使用弹力驱动折叠,不能保证从平面初始状态到最终状态的自驱动性,往往需要手动操作驱动变形.

### 3.2 Kirigami 折叠

2014年,Cho等人<sup>[59]</sup>提出分层分割旋转单元的方法.相较于原始的旋转单元结构,该方法不需要改变材料的物理性质,便可增强目标结构的特性,扩展材料的设计空间,提高伸展性能.

2015年,文献<sup>[11]</sup>利用软膜 Kagome 结构(如图5所示)的屈曲不稳定性,通过控制铰链宽度,提出具有预扭角度的变形方法:指定单元间的预扭角度,控制整体结构的变形路径、变形模式、刚度和负泊松比.该方法提供确定性的变形方式,并防止屈曲的不稳定性.

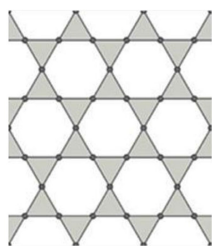


Fig. 5 Kagome<sup>[11]</sup>

图5 Kagome 结构<sup>[11]</sup>

2016年,Rafsanjani等人<sup>[60]</sup>提出双稳态拉胀结构设计方法,通过切割创建刚性旋转单元,在力的作用下可实现2种平面结构的转换,并保证变形结构的负泊松比和双稳态性.刚性单元是在正方形或等边三角形的基础上切割而成,如图6所示:

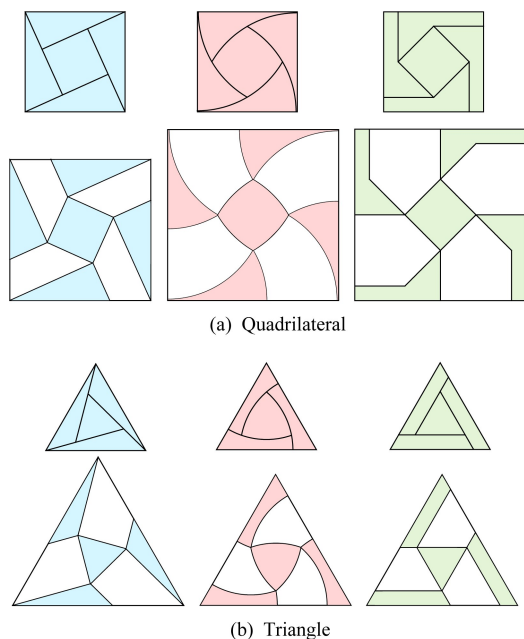


Fig. 6 Cutting and expansion structures of quadrilateral and triangular units<sup>[60]</sup>

图6 四边形和三角形单元的分割和展开结构<sup>[60]</sup>

2016年,Konaković等人<sup>[61]</sup>将平面切割成Kagome旋转单元结构,提出交互式3维结构设计方法.该方法通过计算全局保角映射解决非线性优化问题,但是其3维结构不具有唯一性.在此基础上,2018年,Konaković等人<sup>[62]</sup>提出可展结构设计算法,可在膨胀力或重力荷载下从平面初始状态快速变形为3维目标状态.该结构基于2维非均匀刚性连杆结构,通过用户隐式编码目标形状的曲率,允许在荷载下局部各向同性缩放,解决手动设置目标曲面的问题,此外该结构单元在任何位置都能实现最大扩展.然而该算法只能构建具有正平均曲率的曲面,并不适用于所有曲面.

2019年,Choi等人<sup>[63]</sup>提出使用力学模型模拟2维与3维的Kirigami结构变形过程,可以控制变形结构的稳定性和变形的路径.该力学模型将旋转单元的边模拟为拉伸弹簧,相连的铰链模拟为扭转弹簧,通过最小化变形能量 $E$ ,得到连续的变形路径.变形能量 $E$ 的公式为<sup>[63]</sup>:

$$E(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) = \frac{1}{N_s} \sum_{k,j} \left( \frac{\|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_j\| - l_{kj}}{l_{kj}} \right)^2 + \lambda_r \frac{1}{N_c} \sum_k \theta_k^2, \quad (4)$$

其中, $\mathbf{y}_k$ 表示旋转单元顶点 $k$ 位置, $\theta_k$ 表示分割线间的角度, $l_{kj}$ 为拉伸弹簧 $kj$ 静止状态下的长度, $N_s$ 为拉伸弹簧的数量, $N_c$ 为扭转弹簧的数量, $\lambda_r$ 是扭转弹簧常数与拉伸弹簧常数之比. $\lambda_r$ 越大,铰链越宽,其闭合倾向也越大.因此当 $\lambda_r \rightarrow 0$ 时,其变形结构趋近于双稳态.

对于Kirigami折叠,文献<sup>[59-60]</sup>通过对刚性单元进行二次分割,增强结构特性,如文献<sup>[59]</sup>提高结构的拉伸能力,文献<sup>[60]</sup>提高结构的稳定性.文献<sup>[61-62]</sup>实现2维与3维结构的转换,提出逆设计算法.但文献<sup>[61]</sup>无法保证刚性单元完全展开,而文献<sup>[62]</sup>在此基础上使用膨胀力和重力荷载解决局限性.

## 4 分析与讨论

本节总结展开及折叠算法性能的评价指标,并分析典型展开及折叠算法.

### 4.1 算法评价指标

通过对已有文献的整理研究,4.1.1节总结展开算法的评价指标,4.1.2节总结折叠算法的评价指标.



### 4.1.1 展开算法

展开算法的评价指标分为 2 类:完全展开指标和近似展开指标。

#### 1) 完全展开

完全展开的评价指标包括展开数量( $N_p$ )、展开时间( $T_u$ )、拓扑特征( $N_{\text{DOF}}$ )、面积比( $A_{\text{area}}$ )。其中,拓扑特征  $N_{\text{DOF}}$  可根据多面体网的自由度评定,定义为<sup>[28]</sup>:

$$N_{\text{DOF}} = \frac{N_{\text{leaf}}}{N}, \quad (5)$$

其中, $N_{\text{leaf}}$ 表示展开的多面体网 1 级节点数量, $N$ 表示多面体网的总节点数量。

面积比  $A_{\text{area}}$  提供多面体网的分支间隙信息,是多面体网的包围盒面积  $A_H$  与表面积  $A_D$  之比<sup>[28]</sup>:

$$A_{\text{area}} = \frac{A_H}{A_D}, \quad (6)$$

如果  $A_{\text{area}}$  接近 1,表明多面体网是紧密相连的。

#### 2) 近似展开

近似展开算法除展开时间( $T_u$ )外,还可通过角度失真( $Q_{\text{ang}}$ )或面积失真( $E_A, E_D(u), E_L(u)$ )评估。其中,角度失真  $Q_{\text{ang}}$  为面片  $t_p$  在映射过程中的奇异值  $\sigma_{t_p}^1, \sigma_{t_p}^2$  之比<sup>[64]</sup>:

$$Q_{\text{ang}} = \sum_{t_p} \omega_{t_p} (\sigma_{t_p}^1 / \sigma_{t_p}^2 + \sigma_{t_p}^2 / \sigma_{t_p}^1). \quad (7)$$

面积失真由以下几种方式测量,通过面片  $t_p$  在映射过程中的奇异值  $\sigma_{t_p}^1, \sigma_{t_p}^2$  计算<sup>[64]</sup>:

$$E_A = \sum_{t_p} \omega_{t_p} (\sigma_{t_p}^1 \sigma_{t_p}^2 + 1 / (\sigma_{t_p}^1 \sigma_{t_p}^2)), \quad (8)$$

或通过计算模型  $M$  的 Dirichlet 能量衡量,即测量映射过程中的全局缩放因子  $u$  的变化,定义为<sup>[50]</sup>:

$$E_D(u) := \frac{1}{2} \int_M |\nabla u|^2 dA, \quad (9)$$

当  $E_D$  越趋近于 0,面积失真越小;对于无法用 Dirichlet 能量测量的情况,可使用  $L_2$  范数测量<sup>[50]</sup>:

$$E_L(u) := \frac{1}{2} \int_M u^2 dA. \quad (10)$$

此外,还可通过对比锥数量  $n_{\text{cone}}$  和总锥角  $\omega$  评定,总锥角  $\omega$  可定义为<sup>[50]</sup>:

$$\omega = \sum_{n_{\text{cone}}} \omega_{n_{\text{cone}}}. \quad (11)$$

### 4.1.2 折叠算法

折叠算法的评价指标分为 2 类:Origami 折叠和 Kirigami 折叠指标。

#### 1) Origami 折叠

Origami 折叠的评价指标包括折叠时间( $T_f$ )、

曲面平整度( $\delta_s$ )、可展性( $K$ )、折叠的效率( $\eta_{\text{ori}}$ )、近似误差( $H$ )。对于四边形可展条带拟合的可展曲面,可根据曲面平整度  $\delta_s$  评估曲面质量,定义如下<sup>[56]</sup>:

$$\delta_s = \frac{l_s}{a_s}, \quad (12)$$

其中, $l_s$ 为四边形条带的对角线距离, $a_s$ 为四边形条带的 2 个短边长度的平均值。

曲面的可展性通过计算高斯曲率  $K$  判断,定义如下<sup>[56]</sup>:

$$K(i) = \frac{2\pi - \sum_j \theta_j}{A_{\text{mixed}}}, \quad (13)$$

其中, $\theta_j$ 是顶点  $i$  的一环邻域角度, $j$ 为顶点  $i$  的一环邻域面片数, $A_{\text{mixed}}$ 是  $i$  的一环邻域的混合面积。

折叠效率  $\eta_{\text{ori}}$  为模型的表面积  $A_{\text{pr}}$  与折叠所需的平面材料的表面积  $A_{\text{ori}}$  之比<sup>[52]</sup>:

$$\eta_{\text{ori}} = \frac{A_{\text{pr}}}{A_{\text{ori}}}. \quad (14)$$

近似误差  $H$  可根据生成模型  $M_1$  与目标模型  $M_2$  间的 Hausdorff 距离计算,公式为<sup>[65]</sup>:

$$H = \max\{h(M_1, M_2), h(M_2, M_1)\}, \quad (15)$$

其中, $h(M_1, M_2), h(M_2, M_1)$  分别为从  $M_1$  至  $M_2$  和从  $M_2$  至  $M_1$  的单向 Hausdorff 距离。

#### 2) Kirigami 折叠

Kirigami 折叠的评价指标包括稳态性( $\eta$ )、最大相对顶点偏差( $\rho_{\text{max}}$ )和孔隙度( $S_h$ )。对于由 Kirigami 技术制造的旋转单元拉胀结构,稳态性  $\eta$  定义为变形稳定状态下的局部最小应变能  $E_{\text{min}}$  与其最大应变能  $E_{\text{max}}$  之比<sup>[60]</sup>:

$$\eta = \frac{E_{\text{min}}}{E_{\text{max}}}, \quad (16)$$

当  $\eta < 1$  时表明结构具有双稳态性, $\eta = 1$  表明具有亚稳态性, $\eta > 1$  表明具有单稳态性。

最大相对顶点偏差  $\rho_{\text{max}}$  计算为<sup>[62]</sup>:

$$\rho_{\text{max}} = \frac{D_{\text{max}}}{L}, \quad (17)$$

其中, $D_{\text{max}}$ 为生成结构中顶点与目标结构中对应顶点间的最大距离, $L$ 为目标结构包围盒对角线的长度。

孔隙度  $S_h$  表明 Kirigami 变形结构的孔隙大小,计算公式为<sup>[63]</sup>:

$$S_h = \frac{S_d - S_0}{S_d}, \quad (18)$$

其中, $S_d$ 表示变形结构的孔隙面积, $S_0$ 表示结构

覆盖区域的面积。

## 4.2 算法分析与比较

根据 4.1 节的展开与折叠算法评价指标,对典型的展开与折叠算法进行分析和比较。

### 4.2.1 展开算法

关于展开算法研究工作的分析与比较结果如表 3 所示,主要比较因素包括分类、相关文献、发表年份、评价指标及特点。

Table 3 Comparison of Unfolding Algorithms

表 3 展开算法对比

Classification	Reference	Publication Year	Evaluation Index	Features
Full Unfolding	Ref [66]	2005	$N_p/T_u$	Use the minimum spanning tree to unfold the 3D grid, but its 2D structure is not a single connection.
	Ref [43]	2011	$N_p/T_u$	Use the genetic algorithm to optimize unfolded patches and the distance between boundaries.
	Ref [44]	2015	$T_u$	Use the multi-link tree structure to unfold.
	Ref [28]	2018	$T_u/N_{DOF}/A_{area}$	Combine the topology and geometric features into a genetic-based fitness function, but for complex models, details may be lost.
Approximate Unfolding	Ref [64]	2008	$Q_{ang}/E_A$	Local mapping and global unfolding.
	Ref [67]	2008	$E_D(u)$	Automatically calculate cone singularities, but the texture mapping of high genus grid is not implemented.
	Ref [68]	2010		Introduce elastic deformation to parameterize the mesh, but not suitable for closed grids.
	Ref [3]	2012	$T_u/E_A/n_{cone}$	A global algorithm for finding the location and angle of cone singularities.
	Ref [49]	2017	$E_D(u)/Q_{ang}/T_u$	A linear algorithm that controls the length or angle of the boundary, but only on the Euclidean domain.
	Ref [50]	2018	$n_{cone}/w/E_L(u)$	A global algorithm to calculate the cone singularities (number, size, position), but not find the best 2D layout.
	Ref [51]	2018	$E_D(u)$	Directly optimize the deformation caused by cutting and unfolding, but some areas will be narrow.

在完全展开算法中,实验结果表明:文献[43]的计算时间随着网格面数的增加而增加,并受曲率的影响,其最长展开时间为 785.5 s(950 个面的 fish 模型)。文献[28]在超过 100 个面的模型上训练十分耗时;当 bunny 模型的面数从 48 增加到 128 时,训练时间从 39 min 增加到 427 min。

在近似展开算法中,实验结果表明:在文献[2-3,50]的 3 种添加锥奇点的展开算法中,如表 4 所示;当锥数量相同时,文献[50]的失真面积最小;在面积失真相近时,文献[50]放置的锥数量和总锥角更少;当总锥角相近时,文献[50]放置的锥数量和失真面积更小。此外,对于含有 100 000~150 000 个三角形的模型,文献[50]最多需要 20~25 s,优于其他 2 种算法。在文献[45,69]的 2 种算法中,文献[45]可以控制展开面片数量,相比于后者的简单带状分割方法,更好地抓住曲面的几何特征,且避免引入不必要的分割。在文献[47,49,67]的 3 种可控边界的算法中,文献[49]不仅可以同时控制边界的角度和长度,还表现出最小的最大失真面积。最后,在文献

[64,68]的 2 种算法中,文献[68]具有较好的保面性质,但是其可计算的网格有限。

Table 4 Comparison of Three Cone Singularities Unfolding Algorithms<sup>[50]</sup>

表 4 3 种添加锥奇点展开算法比较<sup>[50]</sup>

Reference	Number of Cones	Total Cone Angles	Area Distortion
Ref [2]	8	$4.02\pi$	0.72
Ref [2]	56	$18.4\pi$	0.09
Ref [3]	38	$8.9\pi$	0.15
Ref [50]	8	$5.0\pi$	0.06

### 4.2.2 折叠算法

典型折叠算法的分析与比较结果如表 5 所示,主要比较因素包括分类、相关文献、发表年份、评价指标以及特点。

对于 Origami 折叠,实验结果表明:文献[52]的折叠效率皆在 0.1~0.5 之间,其中,直径约为 500 mm、厚度约为 116 g/m<sup>2</sup> 的凸形纸折叠而成的 bunny 模型,折叠效率为 0.172。文献[56]中,不同模型每次的

迭代时间为 0.04~0.8 s,其实验结果较为平滑.文献 [58]的算法可在简单模型和局部高曲率的复杂模型上计算,在 Lilium 模型上的平均误差小于 1 mm,而

在 20 cm 的 Spot 模型上,其平均误差小于 4.3 mm,最大误差为 12.8 mm,但是其全局优化时间为 1 362 s,局部优化时间为 6 205 s,耗时较长.

Table 5 Comparison of Folding Algorithms

表 5 折叠算法对比

Classification	Reference	Publication Year	Evaluation Index	Features
Origami	Ref [52]	2010	$T_t/\eta_{ori}$	Introduce tucking molecules to fold a single planar into a 3D structure without cutting; but not suitable for arbitrary models or hard materials.
	Ref [54]	2016		Analyze the six-crease waterbomb folding problem, and propose the motion conditions of zero-thickness and thick panels folding.
	Ref [56]	2016	$T_t/\delta_s/K$	The developable surface is represented as splines, but the approximate continuity and overlap problems are not considered.
	Ref [57]	2017		Construct a network of strings and use tension to drive folding, but cannot calculate the target structure of non-tension forming.
	Ref [58]	2017	$H/\eta_{ori}$	Elasticity drives curvature changes, but not suitable for all models.
Kirigami	Ref [59]	2014		Fractal cutting, but for elastic materials, the deformed structure is not stable.
	Ref [60]	2016	$\eta$	Design the bistable structure, but only consider the rotation in the plane.
	Ref [61]	2016		An inverse design algorithm for 3D structure, but the results require manual control.
	Ref [62]	2018	$\rho_{max}$	Deformation under expansion or gravity load, but cannot construct a negative average curvature structure.
	Ref [63]	2019	$S_h$	Use a mechanical model for simulation, but it is not guaranteed to expand to the maximum.

对于 Kirigami 折叠,实验结果表明:文献[60]虽然改进传统拉胀结构<sup>[59]</sup>单稳态性的特点,生成双稳态结构,但其研究仅局限于平面域.文献[61-62]虽然将结构扩展到 3 维空间,但无法保持双稳态性:文献[61]需要手动控制受力情况,且其 3 维结构并非完全扩展;文献[62]可在膨胀力或重力荷载下自动生成 3 维结构,并保证结构完全扩展,其最差的模型相对偏差为 0.001 8,误差较小.

## 5 总结与展望

本文对近年来的几何展开与折叠算法进行综述、分析与比较:在展开方面,根据展开程度,从完全展开和近似展开 2 方面分别总结并论述其相关研究工作进展;在折叠方面,根据折叠形式不同,分为 Origami 折叠(包括刚性折叠、弯曲折叠)和 Kirigami 折叠 2 类.之后,本文分别给出展开与折叠的评价指标,比较其中的典型算法.此外,本文从机器人领域、

计算机动画领域、深度学习领域及其他领域 4 个方面介绍展开与折叠的相关应用.

目前,已有大量学者对展开与折叠问题进行研究,并提出许多改进算法,但仍存在许多不足,还需进一步研究.本文总结展开与折叠问题的 4 方面发展趋势:

趋势 1. 提高算法的精度和健壮性.

在展开算法中,切割线位置的选取对展开结果有直接影响.对于完全展开算法,需要考虑如何快速精确地寻找最优切割位置;对于近似展开算法,需要考虑如何避免角度或面积失真,计算更近似的平面图案.尤其,对于添加锥奇点的近似展开算法<sup>[2,50,67]</sup>,除了考虑尽可能减少锥数量和锥角外,可以尝试优化圆锥的几何结构,通过寻找最优的锥结构,减少展开结果的失真,提高精度.

在折叠算法中,Origami 折叠需要考虑折叠效率问题,即如何优化约束的折叠过程,在保证折叠连续性的同时避免生成模型的重叠率;而在 Kirigami

折叠的逆设计算法中,需要考虑如何减少变形结构的误差。

此外,大多数的展开与折叠算法只适用于特定类型的模型中,例如 2019 年,Hao 等人<sup>[70]</sup>提出的 3 维凸结构薄板折叠方法。此外,除了计算大型或复杂的非凸多面体的有效展开或折叠路径外,还需要考虑展开结构与折叠结构的互逆过程,确保展开结构可折叠回原模型。

#### 趋势 2. 体折叠问题。

大部分折叠算法都是在零厚度材料的基础上研究,而未考虑厚度对于制造应用的影响。文献<sup>[26]</sup>提出的体折叠算法为相关方向提供基础。此外,在虚拟环境中模拟褶皱是耗时的设计过程,目前的研究大多基于布料或纸张等零厚度材料,文献<sup>[22]</sup>提出的虚拟节点算法虽然可以在实体对象上模拟褶皱(如皮肤),但效果并不真实。本文认为,可以将折叠算法应用在实体对象上,并提高结果的真实性。

#### 趋势 3. 自驱动过程。

展开与折叠问题适用于众多领域,如何进行自驱动展开和折叠过程一直是重要的研究问题。文献<sup>[58]</sup>提出使用弹力驱动折叠,但并不能保证整个折叠过程都处于自驱动状态中,对于部分模型,仍需用户参与调节。文献<sup>[62]</sup>提出使用重力或膨胀力驱动折叠,但其算法只适用于非正平均曲率的双曲面模型。本文认为,在设计展开和折叠算法时,可尝试与已有的智能驱动方式结合,如形状记忆合金<sup>[71]</sup>、电活性聚合物<sup>[72]</sup>和流体驱动<sup>[73]</sup>等,提高计算过程的自驱动能力。

#### 趋势 4. Kirigami 折叠技术的智能应用。

在折叠问题中,Origami 折叠技术一直是科学家的重点研究对象,而 Kirigami 折叠技术却未受到同等的关注度,与 Origami 折叠技术相比,Kirigami 折叠技术更适合用于设计高度可伸缩<sup>[74-75]</sup>和可变形<sup>[76]</sup>结构。但是,Kirigami 折叠技术的设计理论和应用并未完全结合,且并未过多开发相应的设计算法。本文认为 Kirigami 折叠灵活的伸缩性更适合于机器人领域的应用。例如 2018 年,Rafsanjani 等人<sup>[77]</sup>利用 Kirigami 原理,显著提高软体机器人的爬行能力。

此外,由于 Kirigami 折叠结构能灵活地实现 3 维与 2 维结构的转换,且其变形结构具有大量孔隙,同样适用于应用在医疗领域,如智能医用支架设计、智能绷带或皮肤移植等<sup>[78]</sup>,即减少固体部分的实际表面积的同时,减少因接触异物而引起的炎症,避

免治疗的副作用。综上,虽然 Kirigami 折叠技术未得到完全开发,却具有广泛的研究意义,有待进一步探索。

### 参 考 文 献

- [1] Demaine E. Geometric Folding Algorithms [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2007
- [2] Ben-Chen M, Gotsman C, Bunin G. Conformal flattening by curvature prescription and metric scaling [J]. Computer Graphics Forum, 2008, 27(2): 449-458
- [3] Myles A, Zorin D. Global parametrization by incremental flattening [J]. ACM Transactions on Graphics, 2012, 31(4): 109:1-109:11
- [4] Saxena K, Das R, Calius E. Three decades of auxetics research—materials with negative Poisson's ratio: A review [J]. Advanced Engineering Materials, 2016, 18(11): 1847-1870
- [5] Konaković M, Konaković P, Pauly M. Computational design of deployable auxetic shells [C/OL] //Proc of Advances in Architectural Geometry. 2018 [2019-12-11]. <https://lgg.epfl.ch/publications/2018/DeployableAuxeticShells/paper.pdf>
- [6] Callens S, Tümer N, Zadpoor A. Hyperbolic Origami-inspired folding of triply periodic minimal surface structures [J]. Applied Materials Today, 2019, 15: 453-461
- [7] Sussman D, Cho Y, Castle T, et al. Algorithmic lattice Kirigami: A route to pluripotent materials [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2015, 112(24): 7449-7453
- [8] Rafsanjani A, Bertoldi K. Buckling-induced Kirigami [J]. Physical Review Letters, 2017, 118(8): 084301:1-084301:5
- [9] Liu Zhiguang, Du Huifeng, Li Jiafang, et al. Nano-Kirigami with giant optical chirality [J]. Science Advances, 2018, 4(7): 4436:1-4436:8
- [10] Li Jiafang, Liu Zhiguang. Focused-ion-beam-based nano-Kirigami: From art to photonics [J]. Nanophotonics, 2018, 7(10): 1637-1650
- [11] Wu Gaoxiang, Cho Y, Choi I, et al. Directing the deformation paths of soft metamaterials with prescribed asymmetric units [J]. Advanced Materials, 2015, 27(17): 2747-2752
- [12] Grima J, Caruana-Gauci R, Attard D, et al. Three-dimensional cellular structures with negative Poisson's ratio and negative compressibility properties [J]. Royal Society, 2012, 468(2146): 3121-3138
- [13] Miyashita S, Guitron S, Li Shuguang, et al. Robotic metamorphosis by Origami exoskeletons [J]. Science Robotics, 2017, 2(10): 4369:1-4369:6
- [14] Li Shuguang, Vogt D, Rus D, et al. Fluid-driven Origami-inspired artificial muscles [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2017, 114(50): 13132-13137

- [15] Daerden F, Lefeber D, Verrelst B, et al. Pleated pneumatic artificial muscles; Actuators for automation and robotics [C] //Proc of IEEE/ASME Int Conf on Advanced Intelligent Mechatronics. Piscataway, NJ: IEEE, 2001: 738-743
- [16] Yang Dian, Verma M, So J, et al. Buckling pneumatic linear actuators inspired by muscle [J]. *Advanced Materials Technologies*, 2016, 1(3): 1600055;1-1600055;6
- [17] Rus D, Tolley M. Design, fabrication and control of Origami robots [J]. *Nature Reviews Materials*, 2018, 3(5): 101-112
- [18] Li Shuguang, Stampfli J, Xu H J, et al. A vacuum-driven Origami "magic-ball" soft gripper [C] //Proc of IEEE Int Conf on Robotics and Automation. Piscataway, NJ: IEEE, 2019: 7401-7408
- [19] Bridson R, Marino S, Fedkiw R. Simulation of clothing with folds and wrinkles [C] //Proc of Eurographics Symp on Computer Animation. New York: ACM, 2003: 28-36
- [20] Rohmer D, Popa T, Cani M, et al. Animation wrinkling: Augmenting coarse cloth simulations with realistic-looking wrinkles [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2010, 29(5): 157;1-157;9
- [21] Narain R, Pfaff T, O'Brien J. Folding and crumpling adaptive sheets [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2013, 32(4): 51;1-51;8
- [22] Patkar S, Jin Ning, Fedkiw R. A new sharp-crease bending element for folding and wrinkling surfaces and volumes [C] //Proc of Eurographics Symp on Computer Animation. New York: ACM, 2015: 7-15
- [23] Li Minchen, Sheffer A, Grinspun E, et al. FoldSketch: Enriching garments with physically reproducible folds [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2018, 37(4): 133;1-133; 13
- [24] Feng Gang, Liu Shiguang. Detail-preserving SPH fluid control with deformation constraints [J]. *Computer Animation & Virtual Worlds*, 2018, 29(1): 1781;1-1781; 11
- [25] Liu Shiguang, Ma Chao, Feng Gang. Haptic rendering for the coupling between fluid and deformable object [J]. *Virtual Reality*, 2019, 23(1): 33-44
- [26] Zhou Yahan, Sueda S, Matusik W, et al. Boxelization: Folding 3D objects into boxes [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2014, 33(4): 71;1-71;8
- [27] Xi Zhonghua, Kim Y, Kim Y, et al. Learning to segment and unfold polyhedral mesh from failures [J]. *Computers & Graphics*, 2016, 58: 139-149
- [28] Hao Yue, Kim Y, Lien J. Synthesis of fast and collision-free folding of polyhedral nets [C] //Proc of the 2nd ACM Symp on Computational Fabrication. New York: ACM, 2018: 2;1-2;10
- [29] Hansen N, Müller S, Koumoutsakos P. Reducing the time complexity of the derandomized evolution strategy with covariance matrix adaptation (CMA-ES) [J]. *Evolutionary Computation*, 2003, 11(1): 1-18
- [30] Li Xianying, Gu Yan, Hu Shimin. A geometric study of V-style pop-ups: Theories and algorithms [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2012, 14(1): 7-9 (in Chinese)  
(李先颖, 顾研, 胡事民. V型立体纸雕的几何理论与算法的研究[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2012, 14(1): 7-9)
- [31] Glassner A. Interactive pop-up card design. 1 [J]. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 2002, 22(1): 79-86
- [32] Glassner A. Interactive pop-up card design. 2 [J]. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 2002, 22(2): 74-85
- [33] Mitani J, Suzuki H. Computer aided design for Origamic Architecture models with polygonal representation [C] //Proc of Computer Graphics International (CGI). Los Alamitos, CA: IEEE Computer Society, 2004: 93-99
- [34] Li Xianying, Shen Chaohui, Huang Shisheng, et al. PopUp: Automatic paper architectures from 3D models [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2010, 29(4): 111;1-111;9
- [35] Ruiz R, Le S, Yu Jinze, et al. Multi-style paper pop-up designs from 3D models [J]. *Computer Graphics Forum*, 2014, 33(2): 487-496
- [36] Xiao Nan, Zhu Zhe, Martain R, et al. Computational design of transforming pop-up books [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2018, 37(1): 8;1-8;14
- [37] Li Honghua, Hu Ruizhen, Alhashim I, et al. Foldabilizing furniture [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2015, 34(4): 90;1-90;12
- [38] Ji Zhongping, Liu Ligang, Wang Guojin. Feature preserving mesh simplification based on corner cutting [J]. *Journal of Computer Research and Development*, 2006, 43(12): 2144-2151 (in Chinese)  
(计忠平, 刘利刚, 王国瑾. 基于割角的保特征网格简化算法 [J]. *计算机研究与发展*, 2006, 43(12): 2144-2151)
- [39] Zhang Shixue, Zhao Jinyu. Multiresolution animated models generation based on deformation distance analysis [J]. *Journal of Computer Research and Development*, 2012, 49(7): 1432-1437 (in Chinese)  
(张世学, 赵金宇. 基于变形距离分析的多分辨率动画模型生成 [J]. *计算机研究与发展*, 2012, 49(7): 1432-1437)
- [40] Miller E, Pak I. Metric combinatorics of convex polyhedra; Cut loci and nonoverlapping unfoldings [J]. *Discrete & Computational Geometry*, 2008, 39: 339-388
- [41] Itoh J, O'Rourke J, Viluc C. Star unfolding convex polyhedra via quasigeodesic loops [J]. *Discrete & Computational Geometry*, 2010, 4: 35-54
- [42] Demaine E, Demaine M, Hart V, et al. Continuous blooming of convex polyhedra [J]. *Graphs & Combinatorics*, 2011, 27(3): 363-376
- [43] Takahashi S, Wu Hsiangyun, Saw S, et al. Optimized topological surgery for unfolding 3D meshes [J]. *Computer Graphics Forum*, 2011, 30(7): 2077-2086

- [44] Xi Zhonghua, Lien J. Continuous unfolding of polyhedra—a motion planning approach [C] //Proc of 2015 IEEE/RSJ Int Conf on Intelligent Robots and Systems (IROS). Piscataway, NJ: IEEE, 2015: 3249–3254
- [45] Chen Dongren, Wang Guojin. A complex surface adaptive segment and development algorithm based on its quasi-rulings [J]. *Journal of Software*, 2003, 14(3): 660–665 (in Chinese)  
(陈动人, 王国瑾. 基于伪直母线的复杂曲面自适应分片与展开[J]. *软件学报*, 2003, 14(3): 660–665)
- [46] Kharevych L, Springborn B, Schröder P. Discrete conformal mappings via circle patterns [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2006, 25(2): 412–436
- [47] Zayer R, Lévy B, Seidel H. Linear angle based parameterization [C/OL] //Proc of the 5th Eurographics Symp on Geometry Processing. 2007 [2020-02-02]. <http://diglib.eg.org/xmlui/bitstream/handle/10.2312/SGP.SGP07.135-141/135-141.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- [48] Mullen P, Tong Yiyi, Alliez P, et al. Spectral conformal parameterization [C/OL] //Proc of the Symp on Geometry Processing. 2008 [2020-02-02]. <https://www.docin.com/p-1428958371.html>
- [49] Sawhney R, Crane K. Boundary first flattening [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2017, 37(1): 5:1–5:14
- [50] Soliman Y, Slepčev D, Crane K. Optimal cone singularities for conformal flattening [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2018, 37(4): 105:1–105:17
- [51] Sharp N, Crane K. Variational surface cutting [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2018, 37(4): 156:1–156:13
- [52] Tachi T. Origamizing polyhedral surfaces [J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2010, 16(2): 298–311
- [53] Chen Yan, Peng Rui, You Zhong. Origami of thick panels [J]. *Science*, 2015, 349(6246): 396–400
- [54] Chen Yan, Feng Huijuan, Ma Jiayao, et al. Symmetric waterbomb origami [J]. *Proceedings of the Royal Society of London*, 2016, 472(2190): 22:1–22:20
- [55] Solomon J, Vouga E, Wardetzky M, et al. Flexible developable surfaces [J]. *Computer Graphics Forum*, 2012, 31(5): 1567–1576
- [56] Tang Chengcheng, Bo Pengbo, Wallner J, et al. Interactive design of developable surfaces [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2016, 35(2): 12:1–12:12
- [57] Kilian M, Monszpart A, Mitra N. String actuated curved folded surfaces [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2017, 36(3): 25:1–25:13
- [58] Guseinov R, Miguel E, Bickel B. CurveUps: Shaping objects from flat plates with tension-actuated curvature [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2017, 36(4): 64:1–64:12
- [59] Cho Y, Shin J, Costa A, et al. Engineering the shape and structure of materials by fractal cut [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2014, 111(49): 17390–17395
- [60] Rafsanjani A, Pasini D. Bistable auxetic mechanical metamaterials inspired by ancient geometric motifs [J]. *Extreme Mechanics Letters*, 2016, 9(2): 291–296
- [61] Konaković M, Crane K, Deng Bailin, et al. Beyond developable: Computational design and fabrication with auxetic materials [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2016, 35(4): 89:1–89:11
- [62] Konaković M, Panetta J, Crane K, et al. Rapid deployment of curved surfaces via programmable auxetics [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2018, 37(4): 106:1–106:13
- [63] Choi G, Dudte L, Mahadevan L. Programming shape using Kirigami tessellations [J]. *Nature Materials*, 2019, 18: 999–1004
- [64] Liu Ligang, Zhang Lei, Xu Yin, et al. A local/global approach to mesh parameterization [J]. *Computer Graphics Forum*, 2008, 27(5): 1495–1504
- [65] Zhang Dejun, He Fazhi, Tian Long, et al. Efficient Hausdorff distance calculation algorithm based on Z-order and octree [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2018, 30(10): 13–19 (in Chinese)  
(张德军, 何发智, 田龙, 等. 基于 Z 曲线和八叉树的高效 Hausdorff 距离计算方法[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2018, 30(10): 13–19)
- [66] Straub R, Prautzsch H. Creating optimized cut-out sheets for paper models from meshes [C] //Proc of SIAM Geometric Design and Computing. Philadelphia, PA: SIAM, 2005 [2020-02-22]. <http://pdfs.semanticscholar.org/4161/db5602424a52c6ad66053a68963544195938.pdf>
- [67] Springborn B, Schröder P, Pinkall U. Conformal equivalence of triangle meshes [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2008, 27(3): 597–607
- [68] Li Baojun, Zhang Xiangkui, Zhu Xuefeng, et al. A rapid unfolding method based on large elasto-plastic deformation and planar mesh parameterization [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2010, 22(8): 1266–1271 (in Chinese)  
(李宝军, 张向奎, 祝雪峰, 等. 基于弹塑性变形的快速展开算法与网格参数化[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2010, 22(8): 1266–1271)
- [69] Xi Ping. Geometric approach of 3D surface development [J]. *Chinese Journal of Computers*, 1997, 20(4): 315–322 (in Chinese)  
(席平. 三维曲面的几何展开[J]. *计算机学报*, 1997, 20(4): 315–322)
- [70] Hao Yue, Lien J. Computational laser forming Origami of convex surfaces [C] //Proc of the ACM Symp on Computational Fabrication. New York: ACM, 2019: 9:1–9:11
- [71] Jani J, Leary M, Subic A, et al. A review of shape memory alloy research, applications and opportunities [J]. *Materials & Design*, 2014, 56: 1078–1113

- [72] Duduta M, Wood R, Clarke D. Multilayer dielectric elastomers for fast, programmable actuation without prestretch [J]. *Advanced Materials*, 2016, 28(36): 8058–8063
- [73] Veale A, Xie Shengquan, Anderson I. Characterizing the peano fluidic muscle and the effects of its geometry properties on its behavior [J]. *Smart Materials and Structures*, 2016, 25(6): 065013:1–065013:14
- [74] Shyu T, Damasceno P, Dodd P, et al. A Kirigami approach to engineering elasticity in nanocomposites through patterned defects [J]. *Nature Materials*, 2015, 14(8): 785–789
- [75] Tang Yichao, Yin Jie. Design of cut unit geometry in hierarchical Kirigami-based auxetic metamaterials for high stretchability and compressibility [J]. *Extreme Mechanics Letters*, 2017, 12: 77–85
- [76] Neville R, Scarpa F, Pirrera A. Shape morphing Kirigami mechanical metamaterials [J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 31067:1–31067:12
- [77] Rafsanjani A, Zhang Yuerou, Liu Bangyuan, et al. Kirigami skins make a simple soft actuator crawl [J]. *Science Robotics*, 2018, 3(15): 7555:1–7555:7
- [78] Gatt R, Mizzi L, Azzopardi J, et al. Hierarchical auxetic mechanical metamaterials [J]. *Scientific Reports*, 2015, 5: 8395:1–8395:6



**Sun Xiaopeng**, born in 1968. PhD, professor. Senior member of CCF. His main research interest is computer graphics.



**Liu Shihan**, born in 1996. Master candidate. Her main research interest is computer graphics.



**Wang Zhenyan**, born in 1996. Master candidate. Her main research interest is computer graphics.



**Li Jiaojiao**, born in 1997. Master candidate. Her main research interest is computer graphics.