

一种新的犹豫模糊粗糙近似算子的公理刻画

刘 文¹ 米据生¹ 孙 妍²

¹(河北师范大学数学科学学院 石家庄 050024)

²(北京理工大学数学与统计学院 北京 100081)

(1216664721@qq.com)

Axiomatic Characterization of New Hesitant Fuzzy Rough Approximation Operators

Liu Wen¹, Mi Jusheng¹, and Sun Yan²

¹(School of Mathematical Sciences, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024)

²(School of Mathematics and Statistics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

Abstract In order to reveal the deeper essential characteristics of hesitant fuzzy rough approximation operators and further study the relationship between hesitant fuzzy rough approximation spaces and hesitant fuzzy topological spaces, it is of great significance to study the axiomatic characterizations of hesitant fuzzy rough approximation operators. In most of the existing results, the axioms used to describe hesitant fuzzy approximation operators contain multiple axioms. Since the axiomatic characterization of approximation operator is a key method in the research of the mathematical structure of rough set theory, it is a fundamental problem in axiomatic method to find the minimum set of abstract axioms. In view of the above problems, this paper focuses on the study of characterization by using single axiom. The number of axioms in the axiom set is simplified to unique axiom for the first time, and a new axiom description is proposed. First of all, the axiomatic characterizations of classical hesitant fuzzy rough approximation operators are given. Then, we study the problem of the axiomatization of hesitant fuzzy rough approximation operators generated by serial, reflexive, symmetric, transitive and equivalent hesitant fuzzy relations, respectively. Finally, it is proved that the hesitant fuzzy rough approximation space can induce a hesitant fuzzy topological space.

Key words approximation operator; hesitant fuzzy relation; hesitant fuzzy rough set; hesitant fuzzy set; axiomatic characterization

摘 要 为了揭示犹豫模糊粗糙近似算子更深层次的本质特性,且更进一步研究犹豫模糊粗糙近似空间与犹豫模糊拓扑空间之间的关系,对犹豫模糊粗糙近似算子公理刻画问题的研究具有重要意义.在已有结果中,用来刻画犹豫模糊近似算子的公理集大都含有多条公理.由于近似算子公理化方法在研究粗糙集理论的数学结构中具有重要意义,寻找最小公理集成为公理化方法中的一个基本问题.针对上述

收稿日期:2020-06-29;修回日期:2020-11-12

基金项目:国家自然科学基金项目(62076088, 61502144);河北省自然科学基金项目(F2018205196, F2019205295);河北省高等学校自然科学基金项目(BJ2019014);河北省博士后择优资助科研项目(B2016003013);河北省三三三人才工程培养经费(A2017002112)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (62076088, 61502144), the Natural Science Foundation of Hebei Province (F2018205196, F2019205295), the Natural Science Foundation of Higher Education Institutions of Hebei Province (BJ2019014), the Postdoctoral Advanced Programs of Hebei Province (B2016003013), and the Training Funds for 333 Talents Project in Hebei Province (A2017002112).

问题,首次将公理集中的公理简化为一条,提出一种新的公理刻画形式.首先给出一般犹豫模糊粗糙近似算子的公理刻画,然后分别针对串行的、自反的、对称的、传递的和等价的犹豫模糊关系所生成的犹豫模糊粗糙近似算子公理化问题进行研究.最后证明了由犹豫模糊粗糙近似空间可以诱导出一个犹豫模糊拓扑空间.

关键词 近似算子;犹豫模糊关系;犹豫模糊粗糙集;犹豫模糊集;公理刻画

中图法分类号 TP18

波兰数学家 Pawlak^[1]于1982年首次提出粗糙集理论,在其研究中,近似算子的定义主要有2种方法:构造性方法和公理化方法.在构造性方法中,多以论域上的二元关系、划分、覆盖、邻域系统、布尔子代数等作为原始概念,并应用这些概念构造近似算子.相反地,在公理化方法中,则把一对抽象的集合值算子作为原始概念,利用一组公理描述上、下近似算子,即首先通过满足某些条件的公理形式给定粗糙集代数系统中的集合算子,其次寻找合适的二元关系使得由该二元关系及其生成的近似空间按构造性方法导出的近似算子恰好就是由公理方法定义的集合算子.

在对粗糙集理论研究的过程中,最早由 Lin 等人^[2]提出了公理化的方法,Yao^[3]与 Thiele^[4]给出了对于一般关系和各种特殊关系下的粗糙近似算子相对完整的公理刻画结果.Wu 等人^[5]把一般二元关系的粗糙近似算子的公理集拓展到无限论域中.

作为用来处理模糊性和不确定性知识的另一种数学工具,模糊集理论由美国控制论专家 Zadeh^[6]于1965年首次提出,之后粗糙集与模糊集的融合问题成为热门研究方向^[7-8].在模糊粗糙集的研究中,Morsi 等人^[9]最早使用公理化方法研究模糊近似算子,Yang 等人^[10]考虑了分别由一般犹豫模糊关系和串行的、自反的、对称的、传递的犹豫模糊关系导出的犹豫模糊粗糙近似算子的公理刻画问题.Wu 等人^[11]还给出了对偶 (S, T) -模糊粗糙近似算子的单公理刻画,Zhang 等人^[12]给出基于覆盖的近似算子的公理刻画,Pang 等人^[13]基于3类新的 L -模糊关系给出了 L -模糊粗糙近似算子的公理刻画,Pang 等人^[14]提出了一个 L -模糊近似算子的一般结构和各种类型的 L -模糊粗糙集,并用单个公理刻画了每一类 L -模糊关系及其组合对应的 L -模糊近似算子.Li 等人^[15]提出了一种基于模糊邻域系统的粗糙集模型并从公理化的角度研究了粗糙近似算子.对于完全分配格 L ,Sun 等人^[16]引入了 L -模糊上近似算子的概念,给出了 L -模糊上近似算子的公理刻画,

并讨论了串行的、自反的、一元的和传递的 L -广义模糊远邻域系统产生的 L -模糊上近似算子的性质.对于剩余格 L ,Wang 等人^[17]进一步研究了 L -模糊粗糙集的公理刻画,并用2种不同的方法研究了 L -模糊粗糙上近似算子的单公理刻画问题.Pang 等人^[18]针对 L 是一个完备的 Heyting 代数的情形,给出了 L -粗糙近似算子的一般结构.在公理化方法中,证明了分别与串行的、自反的、对称的、传递的、欧几里德的等多种 L -关系所生成的每一类 L -粗糙近似算子,都可以用一条公理来刻画.

在犹豫模糊粗糙集理论研究中,Yang 等人^[10]提出的模型存在一个问题:2个犹豫模糊集之间的包含关系不一定是反对称的,即对任意2个犹豫模糊集 A 和 B ,若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,则不一定有 $B = A$ 成立.针对这一问题,Zhang 等人^[19]将 Yang 的模型进行改进,提出了一种新的犹豫模糊粗糙集模型.本文基于文献^[19]所提出的新模型给出犹豫模糊粗糙近似算子的公理刻画.

1 基础知识

本节给出犹豫模糊集、犹豫模糊关系、犹豫模糊粗糙集的相关概念和性质.

定义 1^[10]. 设 U 为非空有限论域, U 上的一个犹豫模糊集定义为 $A = \{\langle x, h_A(x) \rangle \mid x \in U\}$,其中 $h_A(x)$ 为 x 在犹豫模糊集合 A 中的隶属函数,即 $h_A(x)$ 是 $[0, 1]$ 中不同值的有限集合,表示 U 中元素 x 在犹豫模糊集合 A 中的可能隶属度.

方便起见,称 $h_A(x)$ 为犹豫模糊元, U 上所有犹豫模糊集构成的集合称为 U 的犹豫模糊幂集,记为 $HF(U)$.

注意到,不同犹豫模糊元中数值的数目可能不同,记 $l(h_A(x))$ 表示 $h_A(x)$ 中数值的个数,为了方便计算,给出2点假设:

1) 将每个犹豫模糊元中的元素按递增顺序排列,记为

$h_A(x) = \{h_A^{\sigma(k)}(x) | k=1,2,\cdots,l\}$,
其中 k 表示递增排列后犹豫模糊元中第 k 个数值.
2) 为了方便计算以及合理地对 2 个犹豫模糊元 $h_A(x)$ 与 $h_B(x)$ 进行比较,则当 $l(h_A(x)) \neq l(h_B(x))$ 时,这 2 个犹豫模糊元需要有相同的长度.令

$$l = \max\{l(h_A(x)), l(h_B(x))\},$$

并将元素较少的犹豫模糊元进行扩充,直到 $l(h_A(x)) = l(h_B(x)) = l$.在乐观准则下,通过重复添加最大值进行扩充;在悲观准则下,通过重复添加最小值进行扩充.

由于文献[10]中提出的犹豫模糊粗糙集模型中任意 2 个犹豫模糊集之间的包含关系不一定是反对称的,然而在经典集合理论中任意 2 个集合间的包含关系都满足反对称性.为了弥补这一问题,文献[19]将 Yang 等人^[10]的模型进行了改进,重新定义了 2 个犹豫模糊集合间的包含关系.

定义 2. 设 U 为非空有限论域, A, B 为 2 个犹豫模糊集,若 $h_A(x) \leq h_B(x), \forall x \in U$, 其中

$$h_A(x) \leq h_B(x) \Leftrightarrow h_A^{\sigma(k)}(x) \leq h_B^{\sigma(k)}(x), \\ k=1,2,\cdots,l,$$

则定义为 $A \subseteq B$.

显然上述包含关系满足反对称性.

定义 3^[20]. 设 U 为非空有限论域,称 $R \in HF(U \times U)$ 为 U 上的犹豫模糊关系.

若 $\forall x \in U, \exists y \in U$ 使得 $h_R(x, y) = \{1\}$, 则称 R 是串行的;

若 $\forall x \in U$ 都有 $h_R(x, x) = \{1\}$, 则称 R 是自反的;

若 $\forall (x, y) \in U \times U$ 都有 $h_R(x, y) = h_R(y, x)$, 则称 R 是对称的;

若 $h_R(x, y) \bar{\wedge} h_R(y, z) \leq h_R(x, z)$, 即 $h_R^{\sigma(k)}(x, y) \wedge h_R^{\sigma(k)}(y, z) \leq h_R^{\sigma(k)}(x, z)$, 对于 $\forall x, y, z \in U$ 都成立, 则称 R 是传递的, 其中 $k=1,2,\cdots,l, l = \max\{l(h_R(x, y)), l(h_R(y, z)), l(h_R(x, z))\}$;

若 R 满足自反性、对称性和传递性, 则称 R 为等价的犹豫模糊关系.

基于犹豫模糊元之间新的运算法则, 文献[19]提出一种新的犹豫模糊粗糙集模型. 在该模型当中任意 2 个犹豫模糊集之间的包含关系一定是反对称的.

定义 4. 设 U 为非空有限论域, R 为 U 上的犹豫模糊关系, 则 (U, R) 称作犹豫模糊近似空间. $\forall A \subseteq U, A$ 在犹豫模糊近似空间中的上、下近似 $\bar{R}(A)$,

$\underline{R}(A)$ 定义为

$$\bar{R}(A) = \{\langle x, h_{\bar{R}(A)}(x) \rangle | x \in U\}, \\ \underline{R}(A) = \{\langle x, h_{\underline{R}(A)}(x) \rangle | x \in U\},$$

其中

$$h_{\bar{R}(A)}(x) = \bigvee_{y \in U} \{h_R(x, y) \bar{\wedge} h_A(y)\} = \\ \{\bigvee_{y \in U} (h_R^{\sigma(k)}(x, y) \wedge h_A^{\sigma(k)}(y)) | k=1,2,\cdots,l_x\}, \\ h_{\underline{R}(A)}(x) = \bar{\wedge}_{y \in U} \{h_R(x, y) \vee h_A(y)\} = \\ \{\bigwedge_{y \in U} (h_R^{\sigma(k)}(x, y) \vee h_A^{\sigma(k)}(y)) | k=1,2,\cdots,l_x\}, \\ l_x = \max_{y \in U} \{l(h_R(x, y)), l(h_A(y))\}.$$

则称 $(\underline{R}(A), \bar{R}(A))$ 为 A 在 (U, R) 中的犹豫模糊粗糙集, 分别称 $\underline{R}, \bar{R}$ 为下、上犹豫模糊粗糙近似算子.

性质 1. 犹豫模糊近似空间 (U, R) 中的上、下犹豫模糊粗糙近似算子 $\bar{R}, \underline{R}$ 满足的性质为:

- 1) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{R}(A) \subseteq \bar{R}(B);$
 $\Rightarrow \underline{R}(A) \subseteq \underline{R}(B);$
- 2) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{R}(A) \subseteq \bar{R}(B);$
 $\Rightarrow \underline{R}(A) \subseteq \underline{R}(B);$
- 3) $\bar{R}(A \cup B) = \bar{R}(A) \cup \bar{R}(B);$
- 4) $\underline{R}(A \cap B) = \underline{R}(A) \cap \underline{R}(B);$
- 5) $\bar{R}(A \cap C(a_1, a_2, \cdots, a_m)) = \bar{R}(A) \cap C(a_1, a_2, \cdots, a_m);$
- 6) $\underline{R}(A \cup C(a_1, a_2, \cdots, a_m)) = \underline{R}(A) \cup C(a_1, a_2, \cdots, a_m).$

其中 $\forall A, B \in HF(U), \forall a_i \in [0, 1], i=1, 2, \cdots, m, C(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 表示取值为 $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 的犹豫模糊常数集.

定理 1. 设 U 为非空有限论域, R 为 U 上的犹豫模糊关系, $\bar{R}, \underline{R}$ 分别为犹豫模糊上、下近似算子, 则:

- 1) 犹豫模糊关系 R 是串行的
 $\Leftrightarrow \underline{R}(\emptyset) = \emptyset;$
 $\Leftrightarrow \bar{R}(U) = U;$
 $\Leftrightarrow \underline{R}(A) \subseteq \bar{R}(A), \forall A \in HF(U).$
- 2) 犹豫模糊关系 R 是自反的
 $\Leftrightarrow \underline{R}(A) \subseteq A, \forall A \in HF(U);$
 $\Leftrightarrow A \subseteq \bar{R}(A), \forall A \in HF(U).$
- 3) 犹豫模糊关系 R 是对称的
 $\Leftrightarrow h_{R(U-\{x\})}(y) = h_{R(U-\{y\})}(x), \forall x, y \in U;$
 $\Leftrightarrow h_{R(\{x\})}(y) = h_{R(\{y\})}(x), \forall x, y \in U.$
- 4) 犹豫模糊关系 R 是传递的
 $\Leftrightarrow \underline{R}(A) \subseteq \underline{R}(\underline{R}(A)), \forall A \in HF(U);$
 $\Leftrightarrow \bar{R}(\bar{R}(A)) \subseteq \bar{R}(A), \forall A \in HF(U).$

2 犹豫模糊粗糙近似算子的公理刻画

本节首先给出由一般犹豫模糊关系导出的犹豫模糊粗糙近似算子的公理刻画.

定理 2. 设 $H, L: HF(U) \rightarrow HF(U)$ 为 2 个对偶的犹豫模糊集合算子, 则存在 U 上 1 个犹豫模糊关系 R 使得 $H = \bar{R}, L = \underline{R}$ 成立当且仅当 $\forall A, B \in HF(U), H$ 满足 (HFU) 或 L 满足 (HFL):

$$\begin{aligned} & \text{(HFU)} \quad \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) = \\ & \quad \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)); \\ & \text{(HFL)} \quad \bar{\wedge}_{x \in U} (h_A(x) \underline{\vee} h_{L(B)}(x)) = \\ & \quad \bar{\wedge}_{x \in U} \bar{\wedge}_{y \in U} (h_B(x) \underline{\vee} h_{L(U-\{x\})}(y) \underline{\vee} h_A(y)). \end{aligned}$$

证明. 由犹豫模糊集合算子 H 与 L 的对偶性可知 (HFU) 与 (HFL) 等价. 因此只需证明: 若 U 上存在一个犹豫模糊关系 R , 使得 $H = \bar{R}$ 成立当且仅当 H 满足 (HFU).

首先证明充分性. 设存在 U 上一个犹豫模糊关系 R , 使得 $H(A) = \bar{R}(A)$ 成立, 则由性质 1 可知:

$$H(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bar{R}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} \bar{R}(A_i) = \bigcup_{i \in I} H(A_i),$$

其中 I 为任意索引集. 再由性质 1 得:

$$\begin{aligned} H(A \cap C(a_1, a_2, \dots, a_m)) &= \\ \bar{R}(A \cap C(a_1, a_2, \dots, a_m)) &= \\ \bar{R}(A) \cap C(a_1, a_2, \dots, a_m) &= \\ H(A) \cap C(a_1, a_2, \dots, a_m). \end{aligned}$$

注意到 $B = \bigcup_{y \in U} (C(h_B(y)) \cap 1_y)$, 因此 $\forall x \in U$, 都有:

$$\begin{aligned} & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) = \\ & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(\bigcup_{y \in U} (C(h_B(y)) \cap 1_y))}(x)) = \\ & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} \bigvee_{y \in U} h_{H(C(h_B(y)) \cap 1_y)}(x)) = \\ & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{C(h_B(y))}(x) \bar{\wedge} h_{H(1_y)}(x)) = \\ & \bigvee_{y \in U} \bigvee_{x \in U} (h_B(y) \bar{\wedge} h_{H(1_y)}(x) \bar{\wedge} h_A(x)) = \\ & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)). \end{aligned}$$

其次证明必要性. 设犹豫模糊集合算子 H 满足 (HFU), 由 H 定义 U 上的犹豫模糊关系 R 为

$$h_R(x, y) = h_{H(1_y)}(x), \forall (x, y) \in U \times U.$$

注意到 $\forall A \in HF(U), \forall x \in U$, 都有:

$$A = \bigcup_{x \in U} (C(h_A(x)) \cap 1_x),$$

则 $\forall B \in HF(U)$ 根据定义 4 可知:

$$\begin{aligned} & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{\bar{R}(B)}(x)) = \\ & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} (\bigvee_{y \in U} (h_R(x, y) \bar{\wedge} h_B(y)))) = \\ & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} (h_R(x, y) \bar{\wedge} h_B(y))) = \\ & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(1_y)}(x) \bar{\wedge} h_B(y)) = \\ & \bigvee_{y \in U} \bigvee_{x \in U} (h_B(y) \bar{\wedge} h_{H(1_y)}(x) \bar{\wedge} h_A(x)) = \\ & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)) = \\ & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)). \end{aligned}$$

因此 $H(B) = \bar{R}(B), \forall B \in HF(U)$.

对于下近似算子的情形, 由 L 定义 U 上的犹豫模糊关系 R 为

$$h_R(x, y) = h_{L(U-\{y\})}(x), \forall (x, y) \in U \times U.$$

同时 $\forall A \in HF(U)$, 注意到

$$A = \bigcap_{x \in U} (C(h_A(x)) \cup 1_{U-\{x\}}),$$

即可证明.

证毕.

下面研究由串行的、自反的、对称的、传递的和等价的犹豫模糊关系所生成的犹豫模糊粗糙近似算子的公理刻画.

定理 3. 设 $H, L: HF(U) \rightarrow HF(U)$ 为 2 个对偶的犹豫模糊集合算子, 则存在 U 上一个串行的犹豫模糊关系 R , 使得 $H = \bar{R}, L = \underline{R}$ 成立当且仅当 $\forall A, B \in HF(U), H$ 满足 (HFU1) 或 L 满足 (HFL1):

$$\begin{aligned} & \text{(HFU1)} \quad h_{(U-H(U))}(x) \underline{\vee} \\ & \quad (\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x))) = \\ & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)); \\ & \text{(HFL1)} \quad h_{(U-L(\emptyset))}(x) \bar{\wedge} \\ & \quad (\bar{\wedge}_{x \in U} (h_A(x) \underline{\vee} h_{L(B)}(x))) = \\ & \quad \bar{\wedge}_{x \in U} \bar{\wedge}_{y \in U} (h_B(x) \underline{\vee} h_{L(U-\{x\})}(y) \underline{\vee} h_A(y)). \end{aligned}$$

证明. 由犹豫模糊集合算子的对偶性可知 (HFU1) 和 (HFL1) 等价, 因此只需证若 U 上存在一个串行的犹豫模糊关系 R 使得 $H = \bar{R}$ 成立当且仅当 H 满足 (HFU1).

首先证明充分性. 若 U 上存在一个串行的犹豫模糊关系 R 使得 $H = \bar{R}$ 成立, 由定理 1 可知:

$$H(U) = \bar{R}(U) = U,$$

因此根据定理 2 得:

$$\begin{aligned}
 h_{(U-H(U))}(x) & \underline{\vee} \left(\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) \right) = \\
 h_{(\emptyset)}(x) & \underline{\vee} \left(\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) \right) = \\
 & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) = \\
 & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)).
 \end{aligned}$$

其次证明必要性. 设 H 满足 (HFU1), 取 $A = \emptyset$, 根据 (HFU1) 则有:

$$h_{(U-H(U))}(x) \underline{\vee} \{0\} = \{0\},$$

因此:

$$\begin{aligned}
 h_{(U-H(U))}(x) = 0 & \Rightarrow (U - H(U)) = \emptyset \\
 & \Rightarrow U = H(U).
 \end{aligned}$$

所以:

$$\begin{aligned}
 h_{(U-H(U))}(x) & \underline{\vee} \left(\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) \right) = \\
 & \left(\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) \right) = \\
 & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)).
 \end{aligned}$$

由定理 2 可知, 存在 1 个 U 上的犹豫模糊关系 R 使得 $H = \bar{R}$ 成立, 最后由 $U = H(U)$ 并根据定理 1 得到该犹豫模糊关系是串行的. 证毕.

定理 4. 设 $H, L: HF(U) \rightarrow HF(U)$ 为 2 个对偶的犹豫模糊集合算子, 则存在 U 上一个自反的犹豫模糊关系 R , 使得 $H = \bar{R}, L = \underline{R}$ 成立当且仅当 $\forall A, B \in HF(U)$, H 满足 (HFU2) 或 L 满足 (HFL2):

$$\begin{aligned}
 \text{(HFU2)} \quad & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) = \\
 & \bigvee_{x \in U} \left(\bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)) \underline{\vee} \right. \\
 & \quad \left. (h_A(x) \bar{\wedge} h_B(x)) \right); \\
 \text{(HFL2)} \quad & \bar{\wedge}_{x \in U} (h_A(x) \underline{\vee} h_{L(B)}(x)) = \\
 & \bar{\wedge}_{x \in U} \left(\bar{\wedge}_{y \in U} (h_B(x) \underline{\vee} h_{L(1_x)}(y) \underline{\vee} h_A(y)) \bar{\wedge} \right. \\
 & \quad \left. (h_A(x) \underline{\vee} h_B(x)) \right).
 \end{aligned}$$

证明. 由犹豫模糊集合算子的对偶性可知 (HFU2) 和 (HFL2) 等价, 因此只需证若 U 上存在一个自反的犹豫模糊关系 R 使得 $H = \bar{R}$ 成立当且仅当 H 满足 (HFU2).

首先证明充分性. 若 U 上存在一个自反的犹豫模糊关系 R 使得 $H = \bar{R}$ 成立, 由定理 1 可知:

$$B \subseteq \bar{R}(B) = H(B), \forall B \in HF(U).$$

因此根据定理 2 得:

$$\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) =$$

$$\begin{aligned}
 & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{B \cup H(B)}(x)) = \\
 & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} (h_B(x) \underline{\vee} h_{H(B)}(x))) = \\
 & \bigvee_{x \in U} ((h_A(x) \bar{\wedge} h_B(x)) \underline{\vee} \\
 & \quad (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x))) = \\
 & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) \underline{\vee} \\
 & \quad \left(\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_B(x)) \right) = \\
 & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)) \underline{\vee} \\
 & \quad \left(\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_B(x)) \right) = \\
 & \bigvee_{x \in U} \left(\bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)) \underline{\vee} \right. \\
 & \quad \left. (h_A(x) \bar{\wedge} h_B(x)) \right).
 \end{aligned}$$

其次证明必要性. 设犹豫模糊集合算子 H 满足 (HFU2), 则:

$$\begin{aligned}
 & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{B \cup H(B)}(x)) = \\
 & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} (h_B(x) \underline{\vee} h_{H(B)}(x))) = \\
 & \bigvee_{x \in U} ((h_A(x) \bar{\wedge} h_B(x)) \underline{\vee} (h_A(x) \bar{\wedge} \\
 & \quad h_{H(B)}(x))) = \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) \underline{\vee} \\
 & \quad \left(\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_B(x)) \right) = \\
 & \bigvee_{x \in U} \left(\bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)) \underline{\vee} \right. \\
 & \quad \left. (h_A(x) \bar{\wedge} h_B(x)) \right) \underline{\vee} \left(\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} \right. \\
 & \quad \left. h_B(x)) \right) = \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} \\
 & \quad h_A(y)) \underline{\vee} \left(\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_B(x)) \right) = \\
 & \bigvee_{x \in U} \left(\bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)) \underline{\vee} \right. \\
 & \quad \left. (h_A(x) \bar{\wedge} h_B(x)) \right) = \\
 & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)).
 \end{aligned}$$

因此 $H(B) = B \cup H(B)$, 这样 $B \subseteq H(B)$.

$$\begin{aligned}
 & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) = \\
 & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{B \cup H(B)}(x)) = \\
 & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} (h_B(x) \underline{\vee} h_{H(B)}(x))) = \\
 & \bigvee_{x \in U} ((h_A(x) \bar{\wedge} h_B(x)) \underline{\vee} (h_A(x) \bar{\wedge} \\
 & \quad h_{H(B)}(x))) = \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) \underline{\vee} \\
 & \quad \left(\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_B(x)) \right).
 \end{aligned}$$

由(HFU2)可知:

$$\begin{aligned} & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) \bar{\wedge} \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_B(x)) = \\ & \bigvee_{x \in U} (\bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)) \bar{\wedge} (h_A(x) \bar{\wedge} h_B(x))) = \\ & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)) \bar{\wedge} \bigvee_{x \in U} (\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_B(x))). \end{aligned}$$

因此:

$$\begin{aligned} & \bar{\bigvee}_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) = \\ & \bar{\bigvee}_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)). \end{aligned}$$

由定理 2 可知,存在一个 U 上的犹豫模糊关系 R 使得 $H = \bar{R}$ 成立.最后由 $B \subseteq H(B)$, $\forall B \in HF(U)$, 并根据定理 1 可知该犹豫模糊关系是自反的.证毕.

定理 5. 设 $H, L: HF(U) \rightarrow HF(U)$ 为 2 个对偶的犹豫模糊集合算子,则存在 U 上一个对称的犹豫模糊关系 R ,使得 $H = \bar{R}, L = \underline{R}$ 成立当且仅当 $\forall A, B \in HF(U)$, H 满足(HFU3)或 L 满足(HFL3):

$$\begin{aligned} & \text{(HFU3)} \quad \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) = \\ & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_y)}(x) \bar{\wedge} h_A(y)); \\ & \text{(HFL3)} \quad \bar{\bigwedge}_{x \in U} (h_A(x) \underline{\vee} h_{L(B)}(x)) = \\ & \bar{\bigwedge}_{x \in U} \bar{\bigwedge}_{y \in U} (h_B(x) \underline{\vee} h_{L(U - \{y\})}(x) \underline{\vee} h_A(y)). \end{aligned}$$

证明. 由犹豫模糊集合算子的对偶性可知(HFU3)和(HFL3)等价,因此只需证若 U 存在一个对称的犹豫模糊关系 R ,使得 $H = \bar{R}$ 成立当且仅当 H 满足(HFU3).

首先证明充分性.若 U 上存在一个对称的犹豫模糊关系 R 使得 $H = \bar{R}$ 成立.由定理 1 可知 $h_{H(1_x)}(y) = h_{H(1_y)}(x)$, $\forall x, y \in U$, 因此根据定理 2 得:

$$\begin{aligned} & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) = \\ & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)) = \\ & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_y)}(x) \bar{\wedge} h_A(y)). \end{aligned}$$

其次证明必要性.设 H 满足(HFU3),

$$\begin{aligned} & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) = \\ & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_y)}(x) \bar{\wedge} h_A(y)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bigvee_{y \in U} \bigvee_{x \in U} (h_B(y) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(x)) = \\ & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_B(y)). \end{aligned}$$

取 $B = 1_y, A = U$ 则有:

$$\begin{aligned} & \bigvee_{x \in U} (h_{H(1_y)}(x)) = \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} \\ & h_{1_y}(y)) = \bar{\bigvee}_{x \in U} (h_{H(1_x)}(y)). \end{aligned}$$

因此 $h_{H(1_y)}(x) = h_{H(1_x)}(y)$. 所以

$$\begin{aligned} & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) = \\ & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_y)}(x) \bar{\wedge} h_A(y)) = \\ & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)). \end{aligned}$$

由定理 2 可知, U 上存在一个犹豫模糊关系 R 使得 $H = \bar{R}$ 成立.由于 $h_{H(1_x)}(y) = h_{H(1_y)}(x)$, 并根据定理 1 可知该犹豫模糊关系是对称的.证毕.

定理 6. 设 $H, L: HF(U) \rightarrow HF(U)$ 为 2 个对偶的犹豫模糊集合算子,则存在 U 上一个传递的犹豫模糊关系 R ,使得 $H = \bar{R}, L = \underline{R}$ 成立当且仅当 $\forall A, B \in HF(U)$, H 满足(HFU4)或 L 满足(HFL4):

$$\begin{aligned} & \text{(HFU4)} \quad \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) = \\ & \bigvee_{x \in U} (\bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)) \bar{\wedge} \\ & (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(H(B))}(x))); \\ & \text{(HFL4)} \quad \bar{\bigwedge}_{x \in U} (h_A(x) \underline{\vee} h_{L(B)}(x)) = \\ & \bar{\bigwedge}_{x \in U} (\bar{\bigwedge}_{y \in U} (h_B(x) \underline{\vee} h_{L(U - \{x\})}(y) \underline{\vee} h_A(y)) \bar{\wedge} \\ & (h_A(x) \underline{\vee} h_{L(L(B))}(x))). \end{aligned}$$

证明. 由犹豫模糊集合算子的对偶性可知(HFU4)和(HFL4)等价,因此只需证若 U 存在一个传递的犹豫模糊关系 R ,使得 $H = \bar{R}$ 成立当且仅当 H 满足(HFU4).

首先证明充分性.若 U 上存在一个传递的犹豫模糊关系 R ,使得 $H = \bar{R}$ 成立,由定理 1 可知:

$$\begin{aligned} & H(H(B)) = \bar{R}(\bar{R}(B)) \subseteq \bar{R}(B) = H(B), \\ & \forall B \in HF(U). \end{aligned}$$

因此根据定理 2 得:

$$\begin{aligned} & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) = \\ & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(H(B)) \cup H(B)}(x)) = \\ & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} (h_{H(H(B))}(x) \underline{\vee} h_{H(B)}(x))) = \\ & \bigvee_{x \in U} ((h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(H(B))}(x)) \bar{\wedge} \\ & (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x))) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) \bigvee \\ & \big(\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(H(B))}(x)) \big) = \\ & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)) \bigvee \\ & \big(\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(H(B))}(x)) \big) = \\ & \bigvee_{x \in U} \big(\bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)) \bigvee \\ & (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(H(B))}(x)) \big). \end{aligned}$$

其次证明必要性.设犹豫模糊集合算子 H 满足 (HFU4), 则

$$\begin{aligned} & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(H(B)) \cup H(B)}(x)) = \\ & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} (h_{H(H(B))}(x) \bigvee h_{H(B)}(x))) = \\ & \bigvee_{x \in U} ((h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(H(B))}(x)) \bigvee \\ & (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x))) = \\ & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) \bigvee \\ & \big(\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(H(B))}(x)) \big) = \\ & \bigvee_{x \in U} \big(\bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)) \bigvee \\ & (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(H(B))}(x)) \big) \bigvee \\ & \big(\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(H(B))}(x)) \big) = \\ & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)) \bigvee \\ & \big(\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(H(B))}(x)) \big) = \\ & \bigvee_{x \in U} \big(\bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)) \bigvee \\ & (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(H(B))}(x)) \big) = \\ & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)). \end{aligned}$$

因此 $H(B)=H(H(B)) \cup H(B)$, 这样 $H(H(B)) \subseteq H(B)$.

于是:

$$\begin{aligned} & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) = \\ & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(H(B)) \cup H(B)}(x)) = \\ & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} (h_{H(H(B))}(x) \bigvee h_{H(B)}(x))) = \\ & \bigvee_{x \in U} ((h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(H(B))}(x)) \bigvee \\ & (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x))) = \\ & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) \bigvee \\ & \big(\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(H(B))}(x)) \big). \end{aligned}$$

由 (HFU4) 可知:

$$\begin{aligned} & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) \bigvee \big(\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} \\ & h_{H(H(B))}(x)) \big) = \bigvee_{x \in U} \big(\bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} \\ & h_A(y)) \bigvee (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(H(B))}(x)) \big) = \\ & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)) \bigvee \\ & \big(\bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(H(B))}(x)) \big). \end{aligned}$$

因此:

$$\begin{aligned} & \bigvee_{x \in U} (h_A(x) \bar{\wedge} h_{H(B)}(x)) = \\ & \bigvee_{x \in U} \bigvee_{y \in U} (h_B(x) \bar{\wedge} h_{H(1_x)}(y) \bar{\wedge} h_A(y)). \end{aligned}$$

由定理 2 可知, 存在一个 U 上的犹豫模糊关系 R , 使得 $H=\bar{R}$ 成立. 最后由 $H(H(B)) \subseteq H(B)$, $\forall B \in HF(U)$ 并根据定理 1 可知该犹豫模糊关系是传递的. 证毕.

综合定理 4~6 并根据定义 3 即可得到定理 7.

定理 7. 设 H, L 是 2 个对偶的犹豫模糊集合算子, 则存在 U 上一个等价的犹豫模糊关系 R , 使得 $H=\bar{R}, L=\underline{R}$ 成立当且仅当 $\forall A, B \in HF(U), H$ 满足 (HFU2) (HFU3) (HFU4) 或等价地 L 满足 (HFL2) (HFL3) (HFL4).

3 犹豫模糊拓扑空间的诱导

利用第 2 节所给出的各类犹豫模糊粗糙近似算子公理刻画结论, 对犹豫模糊粗糙近似空间与犹豫模糊拓扑空间之间的关系进行研究. 由于近似算子的对偶性, 下面仅对犹豫模糊下近似算子进行讨论.

推论 1. 设 U 为非空有限论域, R 为 U 上一个自反且传递的犹豫模糊关系, 则有等式成立:

$$\begin{aligned} & \underline{R}(A) = \underline{R}(\underline{R}(A)), \forall A \in HF(U). \\ & \text{证明. 由定理 4 和定理 6 可知, } R \text{ 满足:} \\ & \bar{\bigwedge}_{x \in U} (h_A(x) \bigvee h_{\underline{R}(B)}(x)) = \\ & \bar{\bigwedge}_{x \in U} \big(\bar{\bigwedge}_{y \in U} (h_B(x) \bigvee h_{R(U-\{x\})}(y) \bigvee h_A(y)) \bar{\bigwedge} \\ & (h_A(x) \bigvee h_B(x)) \big), \quad (1) \\ & \bar{\bigwedge}_{x \in U} (h_A(x) \bigvee h_{\underline{R}(B)}(x)) = \\ & \bar{\bigwedge}_{x \in U} \big(\bar{\bigwedge}_{y \in U} (h_B(x) \bigvee h_{R(U-\{x\})}(y) \bigvee h_A(y)) \bar{\bigwedge} \\ & (h_A(x) \bigvee h_{L(L(B))}(x)) \big), \quad (2) \end{aligned}$$

则由式(1)可知 $\underline{R}(A) \subseteq A$, 由式(2)可知 $\underline{R}(A) \subseteq \underline{R}(\underline{R}(A))$.

综上可得 $\underline{R}(A)=\underline{R}(\underline{R}(A))$. 证毕.

在文献[19]中已经证明了 U 上一个自反且传递的犹豫模糊关系 R 满足:

$$\bigcup_{j \in J} \underline{R}(A_j)=\underline{R}(\bigcup_{j \in J} \underline{R}(A_j)),$$

其中 $\forall A_j \in HF(U), J$ 为索引集.

下面证明 U 上自反且传递的犹豫模糊关系在 U 上能诱导一个犹豫模糊拓扑空间.

定理 8. 设 U 为非空有限论域,若 R 为 U 上的自反且传递的犹豫模糊关系,则存在 U 上的一个犹豫模糊拓扑 τ_R ,使得

$$\tau_R=\{A \in HF(U) | \underline{R}(A)=A\}.$$

由文献[21]中犹豫模糊拓扑的定义可知, (U, τ_R) 为犹豫模糊拓扑空间只需满足:

- 1) $C(a_1, a_2, \cdots, a_m) \in \tau_R$, 其中 $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\} \subset [0, 1], C(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 表示犹豫模糊常数集.
 - 2) $A \cap B \in \tau_R, \forall A, B \in \tau_R$.
 - 3) $\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau_R, A_j \in \tau_R, j \in J, J$ 为索引集.
- 证明.

1) 由自反性易知该犹豫模糊关系是串行的, 因此

$$\underline{R}(C(a_1, a_2, \cdots, a_m))=C(a_1, a_2, \cdots, a_m).$$

因此 $C(a_1, a_2, \cdots, a_m) \in \tau_R$.

2) 任取 $A, B \in \tau_R$, 则 $\underline{R}(A)=A, \underline{R}(B)=B$. 由性质 1 可知

$$\underline{R}(A \cap B)=\underline{R}(A) \cap \underline{R}(B)=A \cap B.$$

因此 $A \cap B \in \tau_R$.

3) 任取 $A_j \in \tau_R, j \in J, J$ 为索引集, 由推论 1 可知 $\underline{R}(A_j)=A_j$. 于是

$$\bigcup_{j \in J} \underline{R}(A_j)=\underline{R}(\bigcup_{j \in J} \underline{R}(A_j)).$$

由此可知 $\underline{R}(\bigcup_{j \in J} A_j)=\bigcup_{j \in J} A_j$, 因此 $\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau_R$. 综上所述 τ_R 为 U 上的 1 个犹豫模糊拓扑. 证毕.

4 结束语

本文基于文献[19]所提出的新的犹豫模糊粗糙集模型进行研究,得出刻画犹豫模糊粗糙近似算子的一种新公理集,并进一步解决了分别由串行的、自反的、对称的、传递的和等价的犹豫模糊关系所生成的近似算子的公理刻画问题.最后应用本文结论证明了由犹豫模糊粗糙近似空间可以诱导出一个犹豫模糊拓扑空间.

本文所给出的犹豫模糊粗糙集的公理化方法比较简洁地刻画了犹豫模糊粗糙集的数学结构.另外,

由于粗糙集理论中的下近似算子和上近似算子与模态逻辑学中的必然性算子和可能性算子、拓扑空间中的内部算子和闭包算子、Dempster-Shafer 证据理论中的信任函数与似然函数都有密切联系,因此将粗糙集理论推广到犹豫模糊环境下,可以揭示犹豫模糊粗糙近似算子更深层次的本质特点,且为进一步探讨犹豫模糊粗糙集的拓扑结构奠定基础.

参 考 文 献

[1] Pawlak Z. Rough sets [J]. International Journal of Information and Computer Science, 1982, 11(5): 341-356

[2] Lin T Y, Liu Qing. Rough approximate operators: Axiomatic rough set theory [J/OL]. Rough Sets, Fuzzy Sets and Knowledge Discovery, 1994: 256-260 [2020-07-01]. <https://four.blyun.com/views/specific/3004/FJOurDetail.jsp?dxNumber=370104030351&d=7B8A7E8E6222CA14E493C4E5E4805B0C&s=Rough+approximate+operators%3A+Axiomatic+rough+set+theory&fenlei=0>

[3] Yao Yiyu. Two views of the theory of rough sets in finite universes [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 1996, 15(4): 291-317

[4] Thiele H. On axiomatic characterisations of crisp approximation operators [J]. Information Sciences, 2000, 129(1/2/3/4): 221-226

[5] Wu Weizhi, Mi Jusheng. Some mathematical structures of generalized rough sets in infinite universes of discourse [G] // LNCS 6499: Proc of the Transactions on Rough Sets XIII. Berlin: Springer, 2011: 175-206

[6] Zadeh L A. Fuzzy sets [J]. Information Control, 1965, 8(3): 338-353

[7] Liang Meishe, Mi Jusheng, Feng Tao, et al. Multi-adjoint intuitionistic fuzzy rough sets [J]. The Journal of Engineering, 2018, 2018(16): 1637-1644

[8] Yao Sheng, Xu Feng, Zhao Peng, et al. Intuitionistic fuzzy entropy feature selection algorithm based on adaptive neighborhood space rough set model [J]. Journal of Computer Research and Development, 2018, 55(4): 802-814 (in Chinese)

(姚晟, 徐风, 赵鹏, 等. 基于自适应邻域空间粗糙集模型的直觉模糊熵特征选择[J]. 计算机研究与发展, 2018, 55(4): 802-814)

[9] Morsi N N, Yakout M M. Axiomatics for fuzzy rough sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 100(1/2/3): 327-342

[10] Yang Xibei, Song Xiaoning, Qi Yunsong. Constructive and axiomatic approaches to hesitant fuzzy rough set [J]. Soft Computing, 2014, 18(6): 1067-1077

[11] Wu Weizhi, Shao Mingwen, Wang Xia. Using single axioms to characterize (S, T)-intuitionistic fuzzy rough approximation operators [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2019, 10(1): 27-42

[12] Zhang Yanlan, Li Changqing, Li Jinjin. On characterizations of a pair of covering based approximation operators [J]. Soft Computing, 2019, 23(12): 3965-3972

[13] Pang Bin, Mi Jusheng, Yao Wei. L-fuzzy rough approximation operators via three new types of L-fuzzy relations [J]. Soft Computing, 2019, 23(22): 11433-11446

[14] Pang Bin, Mi Jusheng, Xiu Zhenyu. L-fuzzifying approximation operators in fuzzy rough sets [J]. Information Sciences, 2019, 480: 14-33

[15] Li Lingqiang, Jin Qiu, Yao Bingxue, et al. A rough set model based on fuzzifying neighborhood systems [J]. Soft Computing, 2020, 24(8): 6085-6099

[16] Sun Shuobin, Li Lingqiang, Hu Kai, et al. L-fuzzy upper approximation operators associated with L-generalized fuzzy remote neighborhood systems of L-fuzzy points [J]. AIMS Mathematics, 2020, 5(6): 5639-5653

[17] Wang Chunyong, Zhang Xinguang, Wu Yonghong. New results on single axioms for L-fuzzy rough approximation operators [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2020, 380: 131-149

[18] Pang Bin, Mi Jusheng. Using single axioms to characterize L-rough approximate operators with respect to various types of L-relations [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2020, 11(5): 1061-1082

[19] Zhang Haidong, Shu Lan, Xiong Lianglin. On novel hesitant fuzzy rough sets [J]. Soft Computing, 2019, 23(22): 11357-11371

[20] Deepak D, John S J. Hesitant fuzzy rough sets through hesitant fuzzy relation [J]. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 2014, 8(1): 33-46

[21] Lee J G, Hur K. Hesitant fuzzy topological spaces [J/OL]. Mathematics, 2020, 8(2) [2020-09-04]. <https://fjour.blyun.com/views/specific/3004/FJournDetail.jsp?dxNumber=165457593475&d=02E163F862A03D7759579A7E41AEDBAE&s=Hesitant+fuzzy+topological+spaces%5B&fenlei=0>



Liu Wen, born in 1996. Master candidate at Hebei Normal University. Her main research interests include rough set, granular computing, etc.

刘 文, 1996 年生. 河北师范大学硕士研究生. 主要研究方向为粗糙集、粒计算等.



Mi Jusheng, born in 1966. PhD, professor, PhD supervisor. He was a post-doctoral fellow at the Chinese University of Hong Kong. His main research interests include rough set, granular computing, concept lattice, etc.

米据生, 1966 年生. 博士, 教授, 博士生导师, 曾任香港中文大学博士后研究员. 主要研究方向为粗糙集、粒计算、概念格等.



Sun Yan, born in 1994. PhD candidate at Beijing Institute of Technology. Her main research interests include rough set, granular computing, etc.

孙 妍, 1994 年生. 北京理工大学博士研究生. 主要研究方向为粗糙集、粒计算等.