

含参模糊决策蕴涵

王 琪¹ 李德玉^{1,2} 翟岩慧^{1,2} 张少霞¹

¹(山西大学计算机与信息技术学院 太原 030006)
²(计算智能与中文信息处理教育部重点实验室(山西大学) 太原 030006)
(chai_yanhui@163.com)

Parameterized Fuzzy Decision Implication

Wang Qi¹, Li Deyu^{1,2}, Zhai Yanhui^{1,2}, and Zhang Shaoxia¹

¹(School of Computer and Information Technology, Shanxi University, Taiyuan 030006)
²(Key Laboratory of Computational Intelligence and Chinese Information Processing (Shanxi University), Ministry of Education, Taiyuan 030006)

Abstract Intelligent decision making is an important part of artificial intelligence. In formal concept analysis, decision is represented by decision implication in decision context, while fuzzy decision implication is based on fuzzy decision context, whose premise and conclusion are condition attributes and decision attributes respectively. Fuzzy decision implication exhibits a wider application significance, because it can avoid the fuzzy attribute implications that occur between condition attributes and between decision attributes. Deterministic, unadjustable knowledge acquisition is poorly adaptive to practical applications. Therefore, we need to expand unadjustable knowledge discovery methods to parameterized adjustable knowledge discovery methods. As two kinds of parameterized strategies, hedges and thresholds play an important role in the research of formal concept analysis with fuzzy attributes. Existing fuzzy decision implication models only take into account the hedge operator, which is poor in tunability, and the parameterized strategy that considers the threshold is less studied. Thus, in our paper, complete residual lattice is used as the reference frame, and the two parameterized strategies of hedge and threshold are introduced into fuzzy decision implication. We study the semantic aspect and prove some basic properties. Then we put forward three inference rules for parameterized fuzzy decision implication based knowledge reasoning and show their rationality and completeness. According to the results obtained, in real life, users may choose appropriate hedge and threshold to acquire knowledge, thus enhancing the tunability and application value of fuzzy decision implication.

Key words formal concept analysis; parameterized fuzzy decision implication; parameterize; fuzzy logic; fuzzy decision implication

摘 要 智能决策是人工智能的重要组成部分,在形式概念分析中,决策表现为决策背景上的决策蕴涵,模糊决策蕴涵则是建立在模糊决策背景上的决策蕴涵,其前件和后件分别为条件属性和决策属性.因为模糊决策蕴涵可以避免条件属性之间和决策属性之间生成模糊属性蕴涵,因而具有更广泛的应用意义.

确定化、无调节的知识获取方式对实际应用的适应性差.因此,需要将不可调节的知识发现方式拓展到参数化可调节的知识发现方式.语气真值算子和阈值作为 2 种参数化策略在具有模糊属性的形式概念分析中发挥着重要的作用.现有的模糊决策蕴涵模型仅考虑到语气真值算子的可变,可调节性较差,考虑阈值参数化策略的研究较少.以完备剩余格为参考框架,将语气真值算子和阈值 2 种参数化策略引入模糊决策蕴涵,提出含参模糊决策蕴涵,研究其语义特征,证明一些基本性质,并提出 3 条推理规则,证明其合理性和完备性.在实际生活中,用户可以选择合适的阈值来获取需要的知识,并且可以使用推理规则来进行知识推理,提升模糊决策蕴涵的可调节性和应用价值.

关键词 形式概念分析;含参模糊决策蕴涵;参数化;模糊逻辑;模糊决策蕴涵

中图法分类号 TP18

在哲学视角下,概念由外延和内涵 2 个部分组成,外延被定义为属于这个概念的所有对象的集合,而内涵则是所有这些对象所共有的特征(属性)集合.1982 年,Wille 等人^[1]基于此提出了形式概念分析(formal concept analysis, FCA)理论.该理论根据概念之间的包含关系构成的概念格来反映数据的代数结构.近年来,FCA 以其具有坚实的数学理论支撑、获取的知识层次清晰且逻辑性强等优点,逐渐吸引了广大研究者的兴趣^[2-15].目前,FCA 已经广泛应用于机器学习^[2]、软件工程^[3]、社会网络分析^[4]、概念认知学习^[5-6]、知识获取^[7]和知识约简^[8]等领域.

产生式规则是知识的主要表现形式,FCA 对知识获取的研究就是对蕴涵的研究.由于获得的蕴涵数量庞大,无法满足用户的需求,因此如何获得完备的无冗余的蕴涵成为研究热点.Ganter 等人^[1]研究了蕴涵的语义特征和语构特征,并且给出一种在所有蕴涵基中蕴涵个数最少的蕴涵基,称为自然基.文献^[16]进一步从逻辑角度出发,提出了一种用于判别蕴涵集是否为完备集的充要条件,并且给出一种生成蕴涵完备集的算法.

为了进一步减少蕴涵的数目,Qu 等人通过限制蕴涵的前件和后件分别为条件属性和决策属性提出了决策蕴涵的概念^[17],并完整讨论了决策蕴涵的逻辑特征^[18].基于决策蕴涵的逻辑研究,文献^[19]提出了决策前提的概念,并据此生成一种完备无冗余且最优的知识基:决策蕴涵规范基.文献^[20]对决策蕴涵与粒规则^[21]和概念规则^[22]进行了比较研究,发现与决策蕴涵相比,粒规则和概念规则存在信息损失.另外,文献^[23]也从逻辑角度研究了具有支持度和可信度的决策蕴涵.文献^[24]将决策蕴涵拓展到模糊形式背景上,提出了模糊决策蕴涵的概念,并讨论其语义特征和语构特征.文献^[25]提出模糊决策蕴涵规范基的概念,并证明模糊决策蕴涵规范基的完全性、无冗余性和最优性.

模糊决策蕴涵可以基于语气真值算子(hedge)进行简化知识^[24-25],但并没有考虑阈值这一参数化策略.在现实生活中,阈值在简化知识方面具有重要的作用.例如,在知识“如果 1 个女性年轻的程度超过 0.8,那么该用户喜欢爱情喜剧类电影的程度将会超过 0.5”中,0.8 和 0.5 均为阈值,但模糊决策蕴涵理论并不适用挖掘此类具有阈值的知识.事实上,模糊决策蕴涵理论只能挖掘诸如“年轻女性喜欢爱情喜剧类电影”不带有阈值的知识,其中年轻和爱情喜剧类均为模糊集.可以发现,模糊决策蕴涵仅仅是阈值为 1 时的特例,因此,研究含有阈值的模糊决策蕴涵不仅具有应用意义,而且具有理论意义,即含有阈值的模糊决策蕴涵是模糊决策蕴涵的扩展理论.

本文对模糊决策蕴涵进行拓展,定义了含参模糊决策蕴涵,并研究了其语义特征和语构特征.

1 模糊逻辑

本节简要介绍相关的基础背景知识.

定义 1^[26]. 在 Pavelka 逻辑中,真值结构是形如 $(L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$ 的完备剩余格,满足 3 个性质:

- 1) $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ 是以 0 和 1 为最小元和最大元的完备格;
- 2) $(L, \otimes, 1)$ 为交换幺半群,即 $\otimes$ 满足交换律和结合律,且有 $\forall a \in L, a \otimes 1 = 1 \otimes a = a$;
- 3) $\otimes, \rightarrow$ 为伴随对,满足伴随条件 $a \otimes b \leq c$ 当且仅当 $a \leq b \rightarrow c$,其中 $a, b, c \in L$.

运算 $\otimes, \rightarrow$ 分别表示模糊合取和模糊蕴含, L 中的元素称为真实度.

常见的完备剩余格的例子是单位区间 $[0, 1]$, $\wedge$ 和 $\vee$ 运算分别是最小值和最大值.3 个单位区间上重要的伴随对如下.

Lukasiewicz:

$$a \otimes b = \max(a + b - 1, 0),$$

$$a \rightarrow b = \min(1 - a + b, 1).$$

Godel:

$$a \otimes b = \min(a, b),$$
$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1, & a \leq b, \\ b, & a > b. \end{cases}$$

Goguen:

$$a \otimes b = a \cdot b,$$
$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1, & a \leq b, \\ \frac{b}{a}, & a > b. \end{cases}$$

语气真值算子(hedge)可以增加推理的灵活性.

定义 2^[24]. 模糊集 L 上的语气真值算子定义为

映射 $*$: $L \rightarrow L$, 满足:

- 1) $1^* = 1, a^* \leq a$,
- 2) $(a \rightarrow b)^* \leq a^* \rightarrow b^*$,
- 3) $a^{**} = a^*$,

其中, $a, b \in L$.

最大的语气真值算子为 Identity, 即对任意的 $a \in L$, 都有 $a^* = a$.

最小的语气真值算子为 Globalization, 即

$$a^* = \begin{cases} 1, & a = 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

性质 1^[24]. 完备剩余格主要具有 10 条性质. 对于 $a, b, c, y_i \in L$:

- 1) $a \leq b \Leftrightarrow a \rightarrow b = 1$;
- 2) $a \leq b \rightarrow c \Leftrightarrow b \leq a \rightarrow c$;
- 3) $(a \otimes b) \rightarrow c = (a \rightarrow (b \rightarrow c))$;
- 4) $a \rightarrow \bigwedge y_i = \bigwedge (a \rightarrow y_i)$;
- 5) $1 \rightarrow a = a$;
- 6) $a \otimes (a \rightarrow b) \leq b$;
- 7) $a \leq (b \rightarrow (a \otimes b))$;
- 8) $a^* \otimes b^* = (a \otimes b)^*$;
- 9) $a \leq (b \rightarrow (a \otimes b))^*$;
- 10) $a \otimes \bigvee y_i = \bigvee (a \otimes y_i)$.

定义 3^[24]. 模糊集 A 是定义在论域 X 上的一个映射, 它赋予每个 $x \in X$ 一个隶属度 $A(x) \in L$. 论域 X 上的所有模糊集记为 L^X .

定义 4^[24]. L -模糊集之间的包含关系定义为

$$S(A, B) = \bigwedge_{x \in X} (A(x) \rightarrow B(x)).$$

性质 2^[24]. 模糊集之间的包含关系主要有 4 个性质:

- 1) $a \rightarrow S(A, B) = S(a \otimes A, B) = S(A, a \rightarrow B)$;
- 2) $S(A \cup B, C) = S(A, C) \wedge S(B, C)$;
- 3) $S(A, B \cap C) = S(A, B) \wedge S(A, C)$;
- 4) $S(A, B) \otimes S(B, C) \leq S(A, C)$.

2 含参模糊决策蕴涵的语义、语构及其性质

类似于模糊决策蕴涵^[24], 含参模糊决策蕴涵的研究内容包括语义和语构 2 个方面.

1) 语义方面的研究包括: ①含参模糊决策蕴涵的合理性, 即含参模糊决策蕴涵是否合法; ②含参模糊决策蕴涵的无冗余性, 即含参模糊决策蕴涵能否被其他含参模糊决策蕴涵导出; ③含参模糊决策蕴涵的完备性, 即含参模糊决策蕴涵是否包含完整的信息.

2) 语构方面的研究包括: ①推理规则的合理性, 即含参模糊决策蕴涵能否使用推理规则得出; ②推理规则的完备性, 即是否能用这些推理规则推出所有可能的含参模糊决策蕴涵.

2.1 含参模糊决策蕴涵的语义特征

本文使用 Bělohlávek 等人^[14]提出的同时考虑阈值和语气真值算子的概念构成算子, 并将其引入到模糊决策蕴涵中.

定义 5. $C \cup D$ 上的含参模糊决策蕴涵为公式 $A \Rightarrow B$, 其中 $A \in L^C, B \in L^D$ 分别是条件属性和决策属性的模糊集. 设模糊属性集 $T \in L^{C \cup D}, T_C = \{t/l \in T | t \in T \cap C\}, T_D = \{t/l \in T | t \in T \cap D\}$, 则其对含参模糊决策蕴涵 $A \Rightarrow B$ 的满足程度定义为

$$\|A \Rightarrow B\|_T^\delta = (\delta_1 \rightarrow S(A, T_C))^* \rightarrow (\delta_2 \rightarrow S(B, T_D)) = S(\delta_1 \otimes A, T_C)^* \rightarrow S(\delta_2 \otimes B, T_D),$$

其中, $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in L \times L, \delta_1$ 和 δ_2 是 2 个阈值参数.

在定义 5 中, $S(A, T_C)$ 表示 T_C 包含 A 的程度, $\delta_1 \rightarrow S(A, T_C)$ 表示 T_C 包含 A 的程度至少是 δ_1 的程度, 因此 $\|A \Rightarrow B\|_T^\delta$ 表示命题“若 T_C 含有 A 的程度至少为 δ_1 是非常正确的, 则 T_D 含有 B 的程度至少为 δ_2 ”的真实度. 因此, δ_1 和 δ_2 作为阈值影响了 $A \Rightarrow B$ 在 T 上的真实度. 当语气真值算子取 Identity 时, 含参模糊决策蕴涵为 $S(\delta_1 \otimes A, T_C) \rightarrow S(\delta_2 \otimes B, T_D)$, 特别当 $\|A \Rightarrow B\|_T^\delta = 1$ 时, $S(\delta_1 \otimes A, T_C) \leq S(\delta_2 \otimes B, T_D)$, 换句话说, “ T_D 含有 B 的程度至少为 δ_2 ”的程度大于等于“ T_C 含有 A 的程度至少为 δ_1 ”的程度. 另当语气真值算子取 Globalization, $\|A \Rightarrow B\|_T^\delta = 1$ 时, 有当 $S(\delta_1 \otimes A, T_C) = 1$ 时, $S(\delta_2 \otimes B, T_D) = 1$, 即当 T_C 含有 A 的程度至少为 δ_1 时, T_D 含有 B 的程度至少为 δ_2 . 选择不同的语气真值算子, 可以得到含参模糊决策蕴涵的不同解读.

另外, 当 $\delta_1 = \delta_2 = 1$ 时, $\|A \Rightarrow B\|_T^\delta$ 等价于不含参数的模糊决策蕴涵^[24]. 当 $\delta_1 = \delta_2 = 0$ 时, $\|A \Rightarrow B\|_T^\delta$

表示下列命题的真实度:若 T_C 含有 A 的程度至少为 0 是非常正确的,则 T_D 含有 B 的程度至少为 0. 由模糊集的包含度的定义可知,包含度始终大于等于 0,因此当 $\delta_1 = \delta_2 = 0$ 时,对于任意的 T 有 $\|A \Rightarrow B\|_T^\delta = 1$.

例 1. 令 $L = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$, $C = \{s, l\}$, $D = \{f, n\}$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.5$, 使用 Łukasiewicz 伴随对和 Identity 语气真值算子,令

$$A \Rightarrow B = \{0.5/s, 0.5/l\} \Rightarrow \{0.5/f, 0.5/n\},$$

$$T = \{0.75/s, 0/l, 0.25/f, 0.5/n\},$$

$$T_C = \{0.75/s, 0/l\},$$

$$T_D = \{0.25/f, 0.5/n\},$$

则

$$\begin{aligned} \|A \Rightarrow B\|_T^\delta &= (0.5 \rightarrow ((0.5 \rightarrow 0.75) \wedge \\ &(0.5 \rightarrow 0)))^* \rightarrow (0.5 \rightarrow ((0.5 \rightarrow 0.25) \wedge \\ &(0.5 \rightarrow 0.5))) = 1. \end{aligned}$$

这表明数据 T 满足含参模糊决策蕴涵“若对象含有属性 s 和 l 的程度均超过 0.5,则其含有属性 f 和 n 的程度也均超过 0.5”的程度为 1.

定理 1. 设模糊属性集 $T \in L^C \times L^D$, 含参模糊决策蕴涵为 $A \Rightarrow B$, $A \in L^C$, $B \in L^D$, 则有

$$\begin{aligned} \|A \Rightarrow B\|_T^\delta &= \|A \Rightarrow B\|_{(\delta_1 \rightarrow T_C) \cup (\delta_2 \rightarrow T_D)}^1 = \\ &\delta_2 \rightarrow \|\delta_1 \otimes A \Rightarrow B\|_T^1. \end{aligned}$$

证明. 由定义 5 及伴随对的性质容易证明该结论成立. 证毕.

定理 1 的第 1 个等式表明,在阈值 $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ 下,数据 T 满足含参模糊决策蕴涵的程度与 $(\delta_1 \rightarrow T_C) \cup (\delta_2 \rightarrow T_D)$ 满足模糊决策蕴涵的程度相同.定理 1 的第 2 个等式表明,数据 T 满足含参模糊决策蕴涵的程度等于数据 T 满足前件为 $\delta_1 \otimes A$ 、后件为 B 的模糊决策蕴涵的程度超过 δ_2 的程度.

可以发现,当 $\delta_2 = 0$ 时, $\delta_2 \rightarrow \|\delta_1 \otimes A \Rightarrow B\|_T^1 = 1$,这说明当阈值 $\delta_2 = 0$ 时,模型 T 满足任意含参模糊决策蕴涵.其他情况时,模型 T 满足含参模糊决策蕴涵的程度与 δ_2 呈现反单调性、与 δ_1 呈现单调性.

定理 2. 设模糊属性集 $T \in L^{C \cup D}$, 则对含参模糊决策蕴涵 $A \Rightarrow B$, $A \in L^C$, $B \in L^D$ 有

$$\|A \Rightarrow B\|_T^\delta = \vee \{c \in L \mid \|A \Rightarrow c \otimes B\|_T^\delta = 1\}.$$

证明. 由定理 1 以及文献[22]中定理 1 的证明可证. 证毕.

定义 6. $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\} \subseteq L^{C \cup D}$ 满足含参模糊决策蕴涵 $A \Rightarrow B$, $A \in L^C$, $B \in L^D$ 的程度定义为

$$\|A \Rightarrow B\|_T^\delta = \wedge \{\|A \Rightarrow B\|_{T_i}^\delta \mid T_i \in T\}.$$

定义 6 表明,含参模糊决策蕴涵在数据集 T 中成立的程度是其在所有数据中 $T_i \in T$ 成立程度的最小值.

定义 7. 设 L 为含参模糊决策蕴涵集, L 的所有模型定义为

$$\begin{aligned} Mod^\delta(L) &= \{T \in L^C \times L^D \mid L(A \Rightarrow B) \leq \\ &\|A \Rightarrow B\|_T^\delta\}, \end{aligned}$$

其中, $L(A \Rightarrow B)$ 是 $A \Rightarrow B$ 属于 L 的程度.含参模糊决策蕴涵从 L 中语义导出的程度定义为

$$\|A \Rightarrow B\|_L^\delta = \|A \Rightarrow B\|_{Mod^\delta(L)}^\delta,$$

即 $A \Rightarrow B$ 从 L 导出的程度等于 L 的全部模型满足 $A \Rightarrow B$ 的程度.

例 2. 令含参模糊决策蕴涵集 L 为

$$\begin{aligned} L &= \{(\{0.5/s, 0.25/l\} \Rightarrow \{0.25/f, 0.5/n\})/0.75, \\ &(\{0/s, 0.5/l\} \Rightarrow \{0.5/f, 0/n\})/0.75\}, \end{aligned}$$

令 $\delta_1 = \delta_2 = 0.5$.对于 $T = \{0.5/s, 0/l, 0/f, 0.5/n\}$, 使用 Łukasiewicz 伴随对和 Identity 语气真值算子计算可得

$$\|\{0.5/s, 0.25/l\} \Rightarrow \{0.25/f, 0.5/n\}\|_T^\delta = 1 \geq 0.75,$$

$$\|\{0/s, 0.5/l\} \Rightarrow \{0.5/f, 0/n\}\|_T^\delta = 1 \geq 0.75.$$

可以发现, T 满足 L 中含参模糊决策蕴涵的程度均为 1,从而 T 是 L 的模型.

定理 3. 对于含参模糊决策蕴涵集 L 和含参模糊决策蕴涵 $A \Rightarrow B$, $A \in L^C$, $B \in L^D$ 有

1) $Mod^\delta(L) = \{T \mid (\delta_1 \rightarrow T_C) \cup (\delta_2 \rightarrow T_D) \in Mod^1(L)\};$

$$2) \|A \Rightarrow B\|_L^1 \leq \|A \Rightarrow B\|_L^\delta \leq \|A \Rightarrow B\|_L^{(\delta_1, 0)} = 1;$$

$$3) \|A \Rightarrow B\|_L^1 = \wedge_{\delta \in L \times L} \|A \Rightarrow B\|_L^\delta.$$

证明. 类似于文献[22]可证. 证毕.

定理 3 的 1)和 2)相当于定理 1 的第 1 个等式的推论,定理 3 的 3)是 2)的推论.值得注意的是,由定理 3 的 2)并不能得出含参模糊决策蕴涵的语义导出程度关于参数 δ 是递减的,只能得出该语义导出程度的 2 个极值.参数的引入,使得语义导出程度的变化更加复杂,不再是单纯的单调.

定义 8. 含参模糊决策蕴涵集 L 是封闭的,若对任意的 $A \Rightarrow B$, $\|A \Rightarrow B\|_L^\delta = L(A \Rightarrow B)$.设 L 是封闭的, $D \subseteq L$, 若对任意的 $A \Rightarrow B$ 有 $\|A \Rightarrow B\|_D^\delta = \|A \Rightarrow B\|_L^\delta$, 则称 D 相对于 L 是完备的.若 D 的任意真子集是不完备的,则称 D 是无冗余的.

给定一个条件属性模糊集以及参数 δ_1 和 δ_2 , 该条件属性模糊集可以从给定的含参模糊决策蕴涵集中得出的所有结论,即该条件属性模糊集的闭包.

定义 9. 对于含参模糊决策蕴涵集 L 和 $A \in L^C$, 定义 A 相对于 L 的闭包为

$$A_{\delta}^L = \bigcup \{L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, A)^* \otimes B_1 \mid A_1 \in L^C, B_1 \in L^D\}.$$

例 3. 设 $A = \{0.5/s, 0/l\}$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.5$, 使用 Łukasiewicz 伴随对和 Identity 语气真值算子. 令

$$L = \{(A_1 \Rightarrow B_1)/0.75, (A_2 \Rightarrow B_2)/0.75\} = \{(\{0.5/s, 0.25/l\} \Rightarrow \{0.25/f, 0.5/n\})/0.75, (\{0/s, 0.5/l\} \Rightarrow \{0.5/f, 0/n\})/0.75\},$$

则

$$L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, A)^* \otimes B_1 = 0.75 \otimes 1 \otimes B_1 = \{0/f, 0.25/n\},$$

$$L(A_2 \Rightarrow B_2) \otimes S(\delta_1 \otimes A_2, A)^* \otimes B_2 = \{0/f, 0/n\}.$$

对于不在模糊决策蕴涵集中的模糊决策蕴涵, 有

$$L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, A)^* \otimes B_1 = 0 \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, A)^* \otimes B_1 = \{0/f, 0/n\},$$

因此 $A_{\delta}^L = \{0/f, 0.25/n\}$.

定理 4. 对于含参模糊决策蕴涵集 L 和 $A \in L^C$, 有 $A \cup (\delta_2 \otimes A_{\delta}^L) \in \text{Mod}^{\delta}(L)$.

证明. 对于任意的 $A_1 \Rightarrow B_1 \in L$, 记

$$c = L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, A)^*,$$

显然有

$$(c \otimes B_1(u) \otimes \delta_2) \rightarrow (c \otimes B_1(u) \otimes \delta_2) = 1.$$

由性质 1 的结论 3) 和 4) 有

$$(c \otimes B_1 \otimes \delta_2) \rightarrow (c \otimes B_1 \otimes \delta_2) = c \rightarrow S(\delta_2 \otimes B_1, \delta_2 \otimes c \otimes B_1) = 1,$$

从而 $c \leq S(\delta_2 \otimes B_1, \delta_2 \otimes c \otimes B_1)$, 即

$$L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, A)^* \leq S(\delta_2 \otimes B_1, \delta_2 \otimes L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, A)^* \otimes B_1).$$

又因为

$$\delta_2 \otimes A_{\delta}^L \supseteq \delta_2 \otimes L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, A)^* \otimes B_1,$$

从而可得

$$L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, A)^* \leq S(\delta_2 \otimes B_1, \delta_2 \otimes A_{\delta}^L),$$

即

$$L(A_1 \Rightarrow B_1) \leq S(\delta_1 \otimes A_1, A)^* \rightarrow S(\delta_2 \otimes B_1, \delta_2 \otimes A_{\delta}^L),$$

因此 $A \cup (\delta_2 \otimes A_{\delta}^L) \in \text{Mod}^{\delta}(L)$. 证毕.

例 4. (续例 3) 令 $A = \{0.5/s, 0/l\}$, 由例 3 可得

$$T_0 = A \cup (\delta_2 \otimes A_{\delta}^L) = \{0.5/s, 0/l, 0/f, 0/n\},$$

对于 L 中的含参模糊决策蕴涵有

$$\|\{0.5/s, 0.25/l\} \Rightarrow \{0.25/f, 0.5/n\}\|_{T_0}^{\delta} = 1 \geq 0.75,$$

$$\|\{0/s, 0.5/l\} \Rightarrow \{0.5/f, 0/n\}\|_{T_0}^{\delta} = 1 \geq 0.75,$$

因此有 $T_0 \in \text{Mod}^{\delta}(L)$. 证毕.

定理 5. 对于含参模糊决策蕴涵集 L 和条件属性模糊集 $A \in L^C$, 有 $\|A \Rightarrow (\delta_1 \otimes A)_{\delta}^L\|_L^{\delta} = 1$.

证明. 对于任意的 $T \in \text{Mod}^{\delta}(L)$ 和 $A_1 \Rightarrow B_1$ 有

$$L(A_1 \Rightarrow B_1) \leq \|A_1 \Rightarrow B_1\|_T^{\delta} = S(\delta_1 \otimes A_1, T_C)^* \rightarrow S(\delta_2 \otimes B_1, T_D),$$

由伴随对的性质有

$$L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, T_C)^* \leq S(\delta_2 \otimes B_1, T_D) \Leftrightarrow L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, T_C)^* \rightarrow S(\delta_2 \otimes B_1, T_D) = 1.$$

由性质 1 的结论 8) 和性质 2 的结论 4) 有

$$S(\delta_1 \otimes A_1, \delta_1 \otimes A)^* \otimes$$

$$S(\delta_1 \otimes A, T_C)^* \leq S(\delta_1 \otimes A_1, T_C)^*,$$

两边同乘 $L(A_1 \Rightarrow B_1)$ 可得

$$L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, \delta_1 \otimes A)^* \otimes S(\delta_1 \otimes A, T_C)^* \leq L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, T_D)^*,$$

由 $\rightarrow$ 的性质有

$$L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, \delta_1 \otimes A)^* \otimes S(\delta_1 \otimes A, T_C)^* \rightarrow S(\delta_2 \otimes B_1, T_D) \geq L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, T_C)^* \rightarrow S(\delta_2 \otimes B_1, T_D) = 1,$$

从而

$$L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, \delta_1 \otimes A)^* \otimes S(\delta_1 \otimes A, T_C)^* \leq S(\delta_2 \otimes B_1, T_D),$$

由性质 1 的结论 3) 有

$$S(\delta_1 \otimes A, T_C)^* \leq L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, \delta_1 \otimes A)^* \rightarrow S(B_1, \delta_2 \rightarrow T_D) =$$

$$S(\delta_2 \otimes L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes$$

$$S(\delta_1 \otimes A_1, \delta_1 \otimes A)^* \otimes B_1, T_D),$$

由性质 2 的 2) 和性质 1 的 4), 上式等价于

$$S(\delta_1 \otimes A, T_C)^* \leq \delta_2 \rightarrow S(\bigcup_{A_1 \Rightarrow B_1} L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, \delta_1 \otimes A)^* \otimes B_1, T_D),$$

由定义 9 可得

$$S(\delta_1 \otimes A, T_C)^* \leq \delta_2 \rightarrow S(\bigcup_{A_1 \Rightarrow B_1} L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, \delta_1 \otimes A)^* \otimes B_1, T_D) = S(\delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_{\delta}^L, T_D),$$

从而

$$S(\delta_1 \otimes A, T_C)^* \rightarrow$$

$$S(\delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_{\delta}^L, T_D) = 1,$$

即

$$\|A \Rightarrow (\delta_1 \otimes A)_{\delta}^L\|_{\text{Mod}^{\delta}(L)}^{\delta} = 1. \quad \text{证毕.}$$

定理 5 表明, 在含参模糊决策蕴涵集中, $A \Rightarrow$

$(\delta_1 \otimes A)_\delta^L$ 是恒成立的规则,这条规则不涉及 δ_2 的取值.

定理 6. 对于含参模糊决策蕴涵集 L , 可得 $Mod^\delta(L) = \{A \cup \bar{A} \mid A \in L^C, \bar{A} \in L^D, \delta_2 \otimes A_\delta^L \subseteq \bar{A}\}$.

证明. 由定理 4 容易得

$$Mod^\delta(L) \supseteq \{A \cup (\delta_2 \otimes A_\delta^L) \mid A \in L^C\},$$

对于 $\bar{A} \supseteq \delta_2 \otimes A_\delta^L$ 和任意的 $A_1 \Rightarrow B_1$, 有

$$S(\delta_2 \otimes B_1, \delta_2 \otimes A_\delta^L) \leq S(\delta_2 \otimes B_1, \bar{A}),$$

进而

$$L(A_1 \Rightarrow B_1) \leq \|A_1 \Rightarrow B_1\|_{A \cup (\delta_2 \otimes A_\delta^L)}^\delta \leq \|A_1 \Rightarrow B_1\|_{A \cup \bar{A}}^\delta,$$

从而 $A \cup \bar{A}$ 是 L 的模型, 即

$$Mod^\delta(L) \supseteq \{A \cup \bar{A} \mid A \in L^C, \bar{A} \in L^D, \delta_2 \otimes A_\delta^L \subseteq \bar{A}\}.$$

反过来, 设 $T \in Mod^\delta(L)$, 有

$$\begin{aligned} L(A_1 \Rightarrow B_1) &\leq S(\delta_1 \otimes A_1, T_C)^* \rightarrow \\ &S(\delta_2 \otimes B_1, T_D) \Leftrightarrow L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes \\ &S(\delta_1 \otimes A_1, T_C)^* \leq S(\delta_2 \otimes B_1, T_D) \Leftrightarrow \\ &L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, T_C)^* \leq \\ &\delta_2 \otimes B_1(d) \rightarrow T_D(d), \forall d \in D \\ &\Leftrightarrow L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, T_C)^* \otimes \\ &\delta_2 \otimes B_1(d) \leq T_D(d), \forall d \in D \Leftrightarrow \\ &L(A_1 \Rightarrow B_1) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, T_C)^* \otimes \\ &\delta_2 \otimes B_1 \subseteq T_D, \end{aligned}$$

从而 $\delta_2 \otimes (T_C)_\delta^L \subseteq T_D$.

令 $A = T_C, \bar{A} = T_D$, 则

$$T = A \cup \bar{A} \in \{A \cup \bar{A} \mid A \in L^C, \bar{A} \supseteq \delta_2 \otimes A_\delta^L\}. \text{证毕.}$$

定理 6 表明, $A \cup (\delta_2 \otimes A_\delta^L)$ 是以 A 为条件部分的模型中的最小模型, 因此, 任何结论小于 $(\delta_2 \otimes A_\delta^L)$ 的数据都不是含参模糊决策蕴涵集的模型.

例 5. 设 $C = \{a\}, D = \{z\}$, 真值结构采用 $L = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$, $\delta_1 = 0.75, \delta_2 = 1$, 采用 Łukasiewicz 算子和 Identity 语气真值算子. 设含参模糊决策蕴涵集为 $L = \{\{1/a\} \Rightarrow \{1/z\} / 1\}$. 计算闭包及其模型如表 1 所示:

Table 1 Closure and Models

表 1 闭包及其模型

A	$\delta_2 \otimes A_\delta^L$
$\{0/a\}$	$\{0.25/z\}$
$\{0.25/a\}$	$\{0.75/z\}$
$\{0.5/a\}$	$\{0.75/z\}$
$\{0.75/a\}$	$\{0.75/z\}$
$\{1/a\}$	$\{1/z\}$

因此有

$$\begin{aligned} Mod^\delta(L) = &\{\{0/a, 0.25/z\}, \{0/a, 0.5/z\}, \\ &\{0/a, 0.75/z\}, \{0/a, 1.0/z\}, \{0.25/a, 0.75/z\}, \\ &\{0.25/a, 1/z\}, \{0.5/a, 0.75/z\}, \{0.5/a, 1/z\}, \\ &\{0.75/a, 0.75/z\}, \{0.75/a, 1/z\}, \{1/a, 1/z\}\}. \end{aligned}$$

令 $T = \{0.5/a, 0/z\}$, 计算有 $\|A \Rightarrow B\|_T^\delta = 0.2 < 1$, 所以 T 不是该决策蕴涵集的模型.

定理 7. 对于含参模糊决策蕴涵集 L 和含参模糊决策蕴涵 $A \Rightarrow B$, 有

$$\|A \Rightarrow B\|_T^\delta = S(\delta_2 \otimes B, \delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_\delta^L).$$

证明. 由定理 4 可知 $(\delta_1 \otimes A) \cup (\delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_\delta^L)$ 是 L 的模型. 由定义 9 可知

$$\|A \Rightarrow B\|_L^\delta = \bigwedge_{T \in Mod^\delta(L)} \|A \Rightarrow B\|_T^\delta \leq$$

$$\begin{aligned} \|A \Rightarrow B\|_{(\delta_1 \otimes A) \cup (\delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_\delta^L)}^\delta = \\ S(\delta_2 \otimes B, \delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_\delta^L). \end{aligned}$$

另一方面, 设 $T \in Mod^\delta(L)$, 由定理 5 有

$$\|A \Rightarrow (\delta_1 \otimes A)_\delta^L\|_T^\delta = 1,$$

即

$$S(\delta_1 \otimes A, T_C)^* \rightarrow S(\delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_\delta^L, T_D) = 1,$$

因此

$$S(\delta_1 \otimes A, T_C)^* \leq S(\delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_\delta^L, T_D),$$

从而由性质 2 的结论 4) 可知

$$S(\delta_2 \otimes B, \delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_\delta^L) \otimes$$

$$S(\delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_\delta^L, T_D) \leq S(\delta_2 \otimes B, T_D),$$

因此

$$S(\delta_2 \otimes B, \delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_\delta^L) \otimes$$

$$S(\delta_1 \otimes A, T_C)^* \leq S(\delta_2 \otimes B, T_D),$$

等价于

$$S(\delta_2 \otimes B, \delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_\delta^L) \leq$$

$$S(\delta_1 \otimes A, T_C)^* \rightarrow S(\delta_2 \otimes B, T_D),$$

即 $S(\delta_2 \otimes B, \delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_\delta^L) \leq \|A \Rightarrow B\|_T^\delta$. 由 T 的任意性有

$$S(\delta_2 \otimes B, \delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_\delta^L) \leq$$

$$\bigwedge_{T \in Mod^\delta(L)} \|A \Rightarrow B\|_T^\delta = \|A \Rightarrow B\|_L^\delta. \quad \text{证毕.}$$

定理 7 同时也给出了含参模糊决策蕴涵从含参模糊决策蕴涵集中导出程度的计算方法.

2.2 含参模糊决策蕴涵的语构特征

依据 Pavelka 逻辑^[26], 给定含参模糊决策蕴涵构成的模糊集 L , 其中 $L(A \Rightarrow B)$ 为含参模糊决策蕴涵 $A \Rightarrow B$ 的隶属度, 可以使用推理规则集 $\mathcal{R}$ 进行推理. $\mathcal{R}$ 中的推理规则具有的形式为

$$\frac{\langle \varphi_1, a_1 \rangle, \langle \varphi_2, a_2 \rangle, \dots, \langle \varphi_n, a_n \rangle}{\langle \varphi, a \rangle},$$

其中 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi$ 是 $n+1$ 条含参模糊决策蕴涵, $a_1, a_2, \dots, a_n, a \in L, a_i$ 可以为 $L(\varphi_i)$, 即 φ_i 的隶属度, 也可以为使用推理规则从含参模糊决策蕴涵集推导的 φ_i 的程度.

推理规则的含义为: 若含参模糊决策蕴涵 φ_i 具有隶属度或者导出程度 $a_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 则可推导出程度为 a 的含参模糊决策蕴涵 φ .

针对含参模糊决策蕴涵, 本文提出 3 条推理规则.

1) 含参模糊变换推理规则:

$$\frac{\langle A \Rightarrow B, a \rangle}{\langle A_1 \Rightarrow B_1, a \otimes S(\delta_1 \otimes A, \delta_1 \otimes A_1)^* \otimes S(\delta_2 \otimes B_1, \delta_2 \otimes B) \rangle}.$$

2) 含参模糊扩增推理规则:

$$\frac{\langle A \Rightarrow B_1, 1 \rangle, \langle A \Rightarrow B_2, 1 \rangle}{\langle A \Rightarrow B_1 \cup B_2, 1 \rangle}.$$

3) 含参模糊转换推理规则:

$$\frac{\langle A \Rightarrow B, a \rangle}{\langle A \Rightarrow a \otimes B, 1 \rangle}.$$

定义 10^[24]. 模糊推理规则

$$\frac{\langle \varphi_1, a_1 \rangle, \langle \varphi_2, a_2 \rangle, \dots, \langle \varphi_n, a_n \rangle}{\langle \varphi, a \rangle}$$

是合理的, 若

$$\begin{aligned} & Mod(\{a_1/\varphi_1, a_2/\varphi_2, \dots, a_n/\varphi_n\}) = \\ & Mod(\{a_1/\varphi_1, a_2/\varphi_2, \dots, a_n/\varphi_n, a/\varphi\}). \end{aligned}$$

定理 8. 上述 3 条规则是合理的.

证明. 含参模糊变换推理规则: 设 T 是 $\langle A \Rightarrow B, a \rangle$ 的模型, 即 $\|A \Rightarrow B\|_T^{\delta} \geq a$, 要证明 T 也是 $\langle A_1 \Rightarrow B_1, a \otimes S(\delta_1 \otimes A, \delta_1 \otimes A_1)^* \otimes S(\delta_2 \otimes B_1, \delta_2 \otimes B) \rangle$ 的模型, 即证

$$\begin{aligned} & a \otimes S(\delta_1 \otimes A, \delta_1 \otimes A_1)^* \otimes S(\delta_2 \otimes B_1, \delta_2 \otimes B) \leq \\ & \|A_1 \Rightarrow B_1\|_T^{\delta} = S(\delta_1 \otimes A_1, T_C)^* \rightarrow \\ & S(\delta_2 \otimes B_1, T_D), \end{aligned}$$

这等价于证明

$$\begin{aligned} & a \otimes S(\delta_1 \otimes A, \delta_1 \otimes A_1)^* \otimes S(\delta_2 \otimes B_1, \delta_2 \otimes B) \otimes \\ & S(\delta_1 \otimes A_1, T_C)^* \leq S(\delta_2 \otimes B_1, T_D), \end{aligned}$$

因为 $\|A \Rightarrow B\|_T^{\delta} \geq a$, 只需证明

$$\begin{aligned} & \|A \Rightarrow B\|_T^{\delta} \otimes S(\delta_1 \otimes A, \delta_1 \otimes A_1)^* \otimes S(\delta_2 \otimes B_1, \\ & \delta_2 \otimes B) \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, T_C)^* \leq S(\delta_2 \otimes B_1, T_D), \end{aligned}$$

由性质 2 的结论 4) 可得

$$\begin{aligned} & S(\delta_2 \otimes B_1, \delta_2 \otimes B) \otimes S(\delta_2 \otimes B, T_D) \leq \\ & S(\delta_2 \otimes B_1, T_D), \end{aligned} \quad (1)$$

另外, 由性质 1 的结论 6) 有

$$\begin{aligned} & (S(\delta_1 \otimes A, T_C)^* \rightarrow S(\delta_2 \otimes B, T_D)) \otimes \\ & S(\delta_1 \otimes A, T_C)^* \leq S(\delta_2 \otimes B, T_D), \end{aligned} \quad (2)$$

联立式(1)和式(2)可得

$$\begin{aligned} & (S(\delta_1 \otimes A, T_C)^* \rightarrow S(\delta_2 \otimes B, T_D)) \otimes \\ & S(\delta_1 \otimes A, T_C)^* \otimes S(\delta_2 \otimes B_1, \delta_2 \otimes B) \leq \\ & S(\delta_2 \otimes B, T_D) \otimes S(\delta_2 \otimes B_1, \delta_2 \otimes B) \leq \\ & S(\delta_2 \otimes B_1, T_D), \end{aligned}$$

上式可变形为

$$\begin{aligned} & \|A \Rightarrow B\|_T^{\delta} \otimes S(\delta_1 \otimes A, T_C)^* \otimes \\ & S(\delta_2 \otimes B_1, \delta_2 \otimes B) \leq S(\delta_2 \otimes B_1, T_D), \end{aligned}$$

另外, 由性质 1 的结论 6) 又有

$$\begin{aligned} & S(\delta_1 \otimes A, \delta_1 \otimes A_1)^* \otimes S(\delta_1 \otimes A_1, T_C)^* \leq \\ & S(\delta_1 \otimes A, T_C)^*, \end{aligned}$$

因此可得

$$\begin{aligned} & \|A \Rightarrow B\|_T^{\delta} \otimes S(\delta_1 \otimes A, \delta_1 \otimes A_1)^* \otimes \\ & S(\delta_1 \otimes A_1, T_C)^* \otimes S(\delta_2 \otimes B_1, \delta_2 \otimes B) \leq \\ & S(\delta_2 \otimes B_1, T_D), \end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned} & \|A \Rightarrow B\|_T^{\delta} \otimes S(\delta_1 \otimes A, \delta_1 \otimes A_1)^* \otimes S(\delta_2 \otimes B_1, \\ & \delta_2 \otimes B) \leq S(\delta_1 \otimes A_1, T_C)^* \rightarrow S(\delta_2 \otimes B_1, T_D), \end{aligned}$$

这说明 T 也是 $\langle A_1 \Rightarrow B_1, a \otimes S(\delta_1 \otimes A, \delta_1 \otimes A_1)^* \otimes S(\delta_2 \otimes B_1, \delta_2 \otimes B) \rangle$ 的模型. 证毕.

含参模糊扩增推理规则和含参模糊变换推理规则的合理性证明类似.

对于模糊决策蕴涵集 L , 重复运用这 3 条规则, 直到所有含参模糊决策蕴涵的隶属度到达不动点, 记为 $\bar{L}_{\pm}$.

定义 11. 模糊推理规则集相对于语义特征是完备的, 若对于任意含参模糊决策蕴涵集 L 和任意的 $A \Rightarrow B$, 有 $\bar{L}_{\pm}(A \Rightarrow B) \geq \|A \Rightarrow B\|_L$.

定理 9. 上述 3 条模糊推理规则相对于含参模糊决策蕴涵的语义特征是完备的.

证明. 设 $A \Rightarrow B$ 为含参模糊决策蕴涵, 要证明 $\bar{L}_{\pm}(A \Rightarrow B) \geq \|A \Rightarrow B\|_L$, 只需找到模型 T 证明 $\bar{L}_{\pm}(A \Rightarrow B) \geq \|A \Rightarrow B\|_T^{\delta}$ 即可, 改写含参模糊变换推理规则为

$$\frac{\langle A_i \Rightarrow B_i, b_i \rangle}{\langle A \Rightarrow B_i, b_i \otimes S(\delta_1 \otimes A_i, \delta_1 \otimes A)^* \otimes S(\delta_2 \otimes B_i, \delta_2 \otimes B) \rangle},$$

其中 $b_i = L(A_i \Rightarrow B_i)$. 由含参模糊转换推理规则有

$$\frac{\langle A \Rightarrow b_i \otimes S(\delta_1 \otimes A_i, \delta_1 \otimes A)^* \otimes B_i, 1 \rangle, i=1, 2, \dots, n}{\langle A \Rightarrow \bigcup_i \{b_i \otimes S(\delta_1 \otimes A_i, \delta_1 \otimes A)^* \otimes B_i\}, 1 \rangle},$$

再由含参模糊扩增推理规则合并得到的所有含参模糊决策蕴涵可得

$$\frac{\langle A \Rightarrow b_i \otimes S(\delta_1 \otimes A_i, \delta_1 \otimes A)^* \otimes B_i, 1 \rangle, i=1, 2, \dots, n}{\langle A \Rightarrow \bigcup_i \{b_i \otimes S(\delta_1 \otimes A_i, \delta_1 \otimes A)^* \otimes B_i\}, 1 \rangle},$$

由定义 9 得到 $A \Rightarrow (\delta_1 \otimes A)_{\delta}^L$. 再次应用含参模糊变换推理规则可得

$$\frac{\langle A \Rightarrow (\delta_1 \otimes A)_\delta^L, 1 \rangle}{\langle A \Rightarrow B, 1 \otimes S(\delta_1 \otimes A, \delta_1 \otimes A) * S(\delta_2 \otimes B, \delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_\delta^L) \rangle},$$

因此可以以至少 $S(\delta_2 \otimes B, \delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_\delta^L)$ 的程度生成 $A \Rightarrow B$, 因此有

$$\bar{L}_\pm(A \Rightarrow B) \geq S(\delta_2 \otimes B, \delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_\delta^L).$$

由定理 3 可知 $T = (\delta_1 \otimes A) \cup (\delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_\delta^L)$ 是 L 的模型, 因此有

$$\|A \Rightarrow B\|_{T=(\delta_1 \otimes A) \cup (\delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_\delta^L)}^\delta =$$

$$S(\delta_2 \otimes B, \delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_\delta^L) \leq \bar{L}_\pm(A \Rightarrow B) \text{ 证毕.}$$

可以发现当 $\delta_2 = 0$ 时, 任意含参模糊决策蕴涵 $A \Rightarrow B$ 从含参模糊决策集 L 中导出的程度为 $S(\delta_2 \otimes B, \delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_\delta^L) = 1$, 这与定理 3 的 2) 的结论是一致的. 同时, 在证明过程中得出的 $\langle A \Rightarrow (\delta_1 \otimes A)_\delta^L, 1 \rangle$ 规则与定理 5 表达的意思是一致的. 最后, $S(\delta_2 \otimes B, \delta_2 \otimes (\delta_1 \otimes A)_\delta^L) \leq \bar{L}_\pm(A \Rightarrow B)$ 表明, 使用模糊推理规则集导出的程度大于定理 7 中语义导出的程度, 证明了模糊推理规则集的完备性.

3 结 论

本文在模糊决策蕴涵中引入了阈值, 提出了含参模糊决策蕴涵, 提升了模糊决策蕴涵的可调节性和应用价值. 在语义方面, 研究了含参模糊决策蕴涵的模型和语义导出程度的计算方法; 在语构方面, 将模糊决策蕴涵中的 3 条推理规则拓展到含参模糊决策蕴涵, 并证明了这些推理规则的合理性和完备性.

从理论上, 将阈值引入模糊决策蕴涵的意义并不局限于构建一种以模糊决策蕴涵为特例的理论框架. 一方面, 这种引入方式具有普遍意义, 事实上, 定义 4 和性质 1 的 1) 正是模糊集包含度和含参的模糊集包含度的定义. 因此, 这个引入方式对整个粒计算领域均有参考意义. 另一方面, 由定义 5 可以看出, 将阈值引入模糊决策蕴涵本质上相当于在完备剩余格上建立一种协调结构, 而定理 1 正是说明这种协调结构所具有的特性, 因此, 本文的结论对完备剩余的公理化或代数研究也具有一定的启发意义. 进一步来说, 含参模糊决策蕴涵同时包含阈值和语气真值算子 2 种知识简化策略, 但本文并没有考虑这种简化策略之间的联系和相互作用. 事实上, 如果说参数的引入是在完备剩余格上建立一种协调结构, 那么语气真值算子就是完备剩余格上的另一种协调结构, 因此, 从代数角度和应用角度研究这 2 种结构之间的关系将是下一步的研究工作.

值得指出的是, 在应用中, 用户可能需要根据不同的实际需求选择合适的阈值. 由定理 1 可知, 给定模糊决策背景, 参数 δ_1 越小或参数 δ_2 越大, 满足含参模糊决策蕴涵的模型也越少, 因此模糊决策背景中成立的含参模糊决策蕴涵也越少. 当 δ_1 和 δ_2 分别为 0 和 1 时, 用户可以得到最严格意义上的模糊决策蕴涵; 用户可以进一步增加 δ_1 或减小 δ_2 来获取更多的模糊决策蕴涵. 在具体应用中, 用户可以参考专家的意见来选定阈值, 或选取一些指标(如分类性能等)来有监督地选择合适的阈值.

作者贡献声明: 王琪负责设计研究方案、方法实现与论证、论文初稿撰写; 李德玉提出研究思路, 优化研究方案; 翟岩慧参与研究方案优化以及方法检验与论证; 张少霞参与方法检验与论证以及论文审阅与修订.

参 考 文 献

- [1] Ganter B, Wille R. Formal Concept Analysis-Mathematical Foundations [M]. Berlin: Springer, 1999
- [2] Xu Weihua, Li Wentao. Granular computing approach to two-way learning based on formal concept analysis in fuzzy datasets [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2016, 46(2): 366-379
- [3] Xu Jiaqing, Peng Xin, Zhao Wenyun. Program clustering for comprehension based on fuzzy formal concept analysis [J]. Journal of Computer Research and Development, 2009, 46(9): 1556-1566 (in Chinese)
(许佳卿, 彭鑫, 赵文耘. 一种基于模糊形式概念分析的程序聚类方法[J]. 计算机研究与发展, 2009, 46(9): 1556-1566)
- [4] Nicolas J, François K, Amedeo N. Analysis of social communities with iceberg and stability-based concept lattices [G] // LNCS 4933: Proc of the 6th Int Conf on Formal Concept Analysis. Berlin: Springer, 2008: 258-272
- [5] Xu Weihua, Pang Jinzhong, Luo Shuqun. A novel cognitive system model and approach to transformation of information granules [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2014, 55(3): 853-866
- [6] Li Jinhai, Mei Changlin, Xu Weihua, et al. Concept learning via granular computing: A cognitive viewpoint [J]. Information Sciences, 2015, 298(12): 447-467
- [7] Li Jinhai, Li Yufei, Mi Yunlong, et al. Meso-granularity labeled method for multi-granularity formal concept analysis [J]. Journal of Computer Research and Development, 2020, 57(2): 447-458 (in Chinese)
(李金海, 李玉斐, 米允龙, 等. 多粒度形式概念分析的介粒度标记方法[J]. 计算机研究与发展, 2020, 57(2): 447-458)

- [8] Zhang Wenxiu, Wei Lin, Qi Jianjun. Attribute reduction theory and approach to concept lattice [J]. Science in China: Series E Information Sciences, 2005, 35(6): 628-639
- [9] Burusco A, Fuentes-González R. The study of the L-fuzzy concept lattice [J]. Mathware and Soft Computing, 1970, 1(3): 209-218
- [10] Burusco A, Fuentes-González R. Construction of the L-fuzzy concept lattice [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 97(1): 109-114
- [11] Bělohlávek R. Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles [M]. Berlin: Springer, 2002
- [12] Bělohlávek R, Tatana F, Vychodil V. Galois connections with hedges [C] //Proc of the 11th Int Fuzzy Systems Association World Congress. Berlin: Springer, 2005: 1250-1255
- [13] Bělohlávek R, Vychodil V. Fuzzy concept lattices constrained by hedges [J]. Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, 2007, 11(6): 536-545
- [14] Bělohlávek R, Outrata J, Vychodil V. Thresholds and shifted attributes in formal concept analysis of data with fuzzy attributes [C] //Proc of the 6th Int Conf on Computational Science. Berlin: Springer, 2006: 117-130
- [15] Zhang Wenxiu, Ma Jianmin, Fan Shiqing. Variable threshold concept lattices [J]. Information Sciences, 2007, 177(22): 4883-4892
- [16] Qu Kaishe, Zhai Yanhui. Generating complete set of implications for formal contexts [J]. Knowledge-Based Systems, 2008, 21(5): 429-433
- [17] Qu Kaishe, Zhai Yanhui, Zhao Yanmeng. Study of decision implications based on formal concept analysis [J]. Journal of Systems Science and Information, 2006, 4(3): 533-542
- [18] Zhai Yanhui, Li Deyu, Qu Kaishe. Decision implications: A logical point of view [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2014, 5(4): 509-516
- [19] Zhai Yanhui, Li Deyu, Qu Kaishe. Decision implication canonical basis [J]. Acta Electronica Sinica, 2015, 43(1): 18-23 (in Chinese)
(翟岩慧, 李德玉, 曲开社. 决策蕴涵规范基[J]. 电子学报, 2015, 43(1): 18-23)
- [20] Zhang Shaoxia, Li Deyu, Zhai Yanhui, et al. A comparative study of decision implication, concept rule and granular rule [J]. Information Sciences, 2020, 508(8): 33-49
- [21] Wu Weizhi, Leung Yee, Mi Jushen. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts [J]. IEEE Transactions on Knowledge & Data Engineering, 2009, 21(10): 1461-1474

- [22] Li Jinhai, Mei Changlin, Kumar C A, et al. On rule acquisition in decision formal contexts [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2013, 4(6): 721-731
- [23] Zhai Yanhui, Li Deyu, Zhang Jin. Variable decision knowledge representation: A logical description [J]. Journal of Computational Science, 2017, 25(5): 161-169
- [24] Zhai Yanhui, Li Deyu, Qu Kaishe. Fuzzy decision implications [J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 37(8): 230-236
- [25] Zhai Yanhui, Li Deyu, Qu Kaishe. Fuzzy decision implication canonical basis [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2018, 9(11): 1909-1917
- [26] Pavelka J. On fuzzy logic I: Many-valued rules of inference [J]. Mathematical Logic Quarterly, 1979, 25(3-6): 45-52



Wang Qi, born in 1997. Master. His main research interests include data mining and intelligent decision.

王 琪, 1997 年生. 硕士. 主要研究方向为数据挖掘与智能决策.



Li Deyu, born in 1965. PhD, professor, PhD supervisor. Senior member of CCF. His main research interests include rough set, multi-label learning.

李德玉, 1965 年生. 博士, 教授, 博士生导师. CCF 高级会员. 主要研究方向为粗糙集、多标签学习.



Zhai Yanhui, born in 1981. PhD, associate professor, PhD supervisor. Member of CCF. His main research interests include concept lattice and rough set.

翟岩慧, 1981 年生. 博士, 副教授, 博士生导师. CCF 会员. 主要研究方向为概念格和粗糙集.



Zhang Shaoxia, born in 1991. PhD. Her main research interest is concept lattice.

张少霞, 1991 年生. 博士. 主要研究方向为概念格.