

曲面上旅行商问题的多项式时间近似方案

王 刚 骆志刚

(国防科学技术大学计算机学院 长沙 410073)
(wanggang0723@gmail.com)

A Polynomial Time Approximation Scheme for the Traveling Salesman Problem in Curved Surfaces

Wang Gang and Luo Zhigang

(College of Computer, National University of Defense Technology, Changsha 410073)

Abstract The polynomial time approximation scheme (PTAS) for Euclidean traveling salesman problem (TSP) combines the two methods of recursive partition and dynamic programming. Similar techniques have been used to construct PTASes for some other Euclidean combinatorial optimization problems. To extend the applications of this method further, TSP in curved surfaces is studied. Observing that the sphere surface has no recursive regular partition as the plane, for a spherical TSP instance that can be covered by an open hemisphere, which we call a small scale instance, we project it onto a sphere-inscribed square to get a plane TSP instance. We perturb the new instance and construct its partition grid. Then we project the perturbed instance and the grid back onto the sphere surface. Things left, such as dynamic programming and randomization, are the same as the PTAS for the plane TSP. This result is generalized to non-small scale spherical TSP and TSP in a set of other curved surfaces. Because of the irregularity of the projections between the sphere surface and the plane, this method is not a PTAS reduction from the spherical TSP to the plane TSP.

Key words traveling salesman problem (TSP); approximation algorithm; polynomial time approximation scheme (PTAS); convex hull; rotating calipers; projection

摘 要 欧氏旅行商问题(TSP)的多项式时间近似方案(PTAS)结合了递归剖分、动态规划两种方法。相似的技术已成功用于构造多个欧氏组合优化问题的 PTAS。为进一步拓展该方法的适用范围,研究曲面上的 TSP。观察到球面不像平面那样可以递归正则剖分,对于可被开半球完全覆盖的小尺度球面 TSP,采用的策略为将其逆球心射影到一个球内接正方形上,扰动其顶点并构造剖分网格,接着将该网格射影到球面,然后如同平面 TSP 的 PTAS 一样进行动态规划等操作。该策略被拓展到非小尺度球面 TSP 及更一般的一类曲面 TSP。需注意的是由于球面、平面之间射影变形的不规则性,无法将球面 TSP 直接 PTAS 归约为平面 TSP。

关键词 旅行商问题;近似算法;多项式时间近似方案;凸壳;旋转卡壳;射影

中图法分类号 TP301.6

旅行商问题 (traveling salesman problem, TSP), 又称货郎担问题, 即给定一个加权完全图, 寻找其上长度最短的哈密顿圈。TSP 是一个经典的 NP 难解组合优化问题。一

个 n 阶完全图包含 $(n-1)!/2$ 个哈密顿圈, 穷举搜索对 TSP 而言不具可行性. TSP 求解的已知最佳结果——Held-Karp 算法^[1], 时间复杂度依然高达 $O(n^2 2^n)$.

若 TSP 问题中图上边的权值满足三角不等式, 则称之为距离 TSP, 记为 TSP^Δ . 进而, 若图的顶点取自某一欧氏空间, 边上的权值取点间欧氏距离, 则称之为欧氏 TSP, 记为 $TSP^{d-Euclid}$, 其中 d 表示欧氏空间的维数. 对任意固定的 $d \geq 2$, 作为 TSP^Δ 子集的 $TSP^{d-Euclid}$ 依然是 NP 难解的^[2-3].

NP 难解是一种最差情形属性. 对诸如 TSP 的 NP 难解问题, 通常有如下几种选择:

1) 给出子问题的多项式时间算法. 文献^[4]综述了 Gilmore-Gomory TSP 等 P 类 TSP 子问题.

2) 平均复杂性分析. 平面随机 TSP 的 Karp 算法^[5]是此类工作的一项早期成果.

3) 参数复杂性分析. 比如文献^[6]包含了 DLTSP 问题的参数复杂性分析.

4) 近似算法. 近似算法在多项式时间内给出具有某种品质保证的近似解. 依据对近似解优劣评价方式的不同, 近似算法又可分为以下 3 类:

① 标准近似 (standard approximation) 度量近似解偏离最优解的相对误差. 组合优化问题标准近似算法的设计与分析以及不可近似性研究是算法领域一个欣欣向荣的分支.

② 微分近似 (differential approximation) 研究近似解的解值在最优解值和最差解值所形成区间内所处的位置. TSP, Max TSP, TSP^Δ 以及 Max TSP^Δ 都存在微分近似比为 $2/3$ 的近似算法^[7]. 而 Min $TSP^{[1..2]}$, Max $TSP^{[1..2]}$ 则属于 DAPX($3/4$)^[8].

③ 占优分析 (domination analysis) 关注近似解在整个可行域中的排名^[9]. 已被用于解释某些使用较小搜索邻域的 TSP 局部搜索算法实验效果好于使用较大搜索邻域者的奇异现象^[10].

5) 启发式方法. 启发式方法通常不保证最差情形下所得近似解的优劣, 也不对运行时间做强制性要求. 其性能通一般通过典型实例集上的实验予以验证^[11-12].

本文针对 TSP 问题的标准近似开展研究. 下文凡提到近似均指标准近似.

为 TSP 寻找具有常数近似比的近似算法是一个 NP 难解问题^[13]. 对于 TSP^Δ , 近似比为 $3/2$ 的 Christofides 算法^[14]为已知最佳近似算法. 若 $P \neq NP$, 则 $\forall \epsilon > 0, TSP^\Delta \notin APX(220/219 - \epsilon)$ ^[15]. 而几

何化的 $TSP^{d-Euclid}$ 问题则存在多项式时间近似方案^[16-17]. 异于主流近似算法所使用的先松弛 (线性规划、半定规划等凸优化松弛)、后舍入的算法框架, $TSP^{d-Euclid}$ 的两个 PTAS 都使用了一种先递归剖分、后动态规划的方法. 其中 Arora 的 PTAS^[16] 被拓展到一系列欧氏组合优化问题^[18-19]. 文献^[20]探讨了该 PTAS 的实际性能.

本文关注以球面 TSP (TSP°) 为代表的曲面上的 TSP 问题. 主要工作如下:

1) 给出了曲面上 TSP 问题具有 NP 难解性的一个充分条件;

2) 证明了球面的两个性质, 其一排除了对球面进行递归正则剖分的可能性, 其二则肯定了球面的比较规则的递归剖分的存在性;

3) 基于凸壳以及旋转卡壳算法, 给出了小尺度 TSP° 实例的判定及其支撑平面的计算方法;

4) 通过小尺度 TSP° 的最小球面边界正方形和该正方形所对应的球内接平面正方形之间的射影, 分两阶段调用平面 TSP 的 PTAS^[16], 得到了小尺度 TSP° 的 PTAS;

5) 给出了一般 TSP° 实例的 PTAS;

6) 给出了一般曲面上 TSP 问题存在 PTAS 的一个充分条件.

1 曲面上 TSP 的 NP 难解性

在文献^[2]中, Garey 等人证明了下述变异的 $TSP^{2-Euclid}$ 问题的 NP 完全性: 平面上 n 个点均为整数坐标点, 点间距离为

$$l'_2 \triangleq \lceil \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \rceil.$$

考虑从平面上 l'_2 距离下整数坐标点 TSP 实例 I 到包含可微点 P 的曲面 S 上的 TSP 问题 I^S 的变换:

给定点 P 处切平面上任意两点 u, v , 记 u', v' 为两者沿 P 处法线方向在 S 上的射影. 首先找到 P 的一个邻域 $B(P, \delta)$, 使得任意的 u, v , 有 $|\widehat{u'v'}| / |uv| < 1 + 1/(2mn)$ 成立, 其中 $\widehat{u'v'}$ 表示连接 u', v' 的测地线, m 为 I 的最大边长. 由切平面以及弧长的定义可知, 当 $\delta \rightarrow 0$ 的时候, $B(P, \delta)$ 内任意两点间的距离逼近它们在 S 上的射影点之间的测地距离. 所以满足条件的邻域 $B(P, \delta)$ 一定存在.

接下来经平移 (和压缩) 将 I 置入 $B(P, \delta)$, 记为 I' , 压缩率为 k .

最后沿 P 点处的法线方向将 I' 射影到 S 上,得 I^S . 计算可知: I' 的任意哈密顿圈射影后伸长小于 $1/(2k)$. 而 I' 可行域内不同解值之差至少为 $1/k$. 所以,若将 I^S 的哈密顿圈按长度单调递增排序,那么它们在切平面上的“原像”也是单调递增的.

定理 1. 若上述变换可在多项式时间内完成,则 TSP^S 是 NP 难解的.

证明. 由前述分析,下述问题是等价的:

- 1) 给定常数 s , 判断实例 I 是否包含长度小于 s 的哈密顿圈.
- 2) 给定常数 s/k , 判断实例 I' 是否包含长度小于 s/k 的哈密顿圈.
- 3) 给定常数 $(s+1/2)/k$, 判断实例 I^S 是否包含长度小于 $(s+1/2)/k$ 的哈密顿圈. 证毕.

2 球面上 TSP 的多项式时间近似方案

TSP 显然源自地球上商人的旅行问题. 定理 1 表明了 TSP^o 的 NP 难解性. 至于可近似性, 直觉而言, TSP^o 和 $TSP^{2-Euclid}$ 非常相似, 也可能稍难.

2.1 球面的两个性质

考虑不含悬挂点的连通平面图将球面嵌入, 顶点间以测地弧(球面大圆上的劣弧)相连接, 称之为球面图. 球面本身被球面图剖分成若干球面多边形区域, 称为球面图的面. 若一个球面图所有的面全等, 所有顶点处的所有邻边间的夹角相等且所有顶点关联的边数相同, 则称其为球面的一个正则剖分.

球面正则剖分的每个面显然是球面正多边形. 以欧拉公式 $v-e+f=2$ 为基础, 可得如下结论:

定理 2. 球面的正则剖分仅有 6 类. 它们是球内接正多面体的一维边界(棱)的球心射影所得 5 个剖分以及由全等的球面正二角形所构成的剖分.

证明. 设该剖分的每个面是球面正 n 边形, r 条棱交于每个顶点.

每条棱同时属于 2 个面, 故 $nf=2e \Rightarrow f=2e/n$. 又每条棱有 2 个顶点, 从而 $rv=2e \Rightarrow v=2e/r$. 代入欧拉公式得 $2e/r+2e/n-e=2$. 即:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}.$$

n 和 r 不能同时大于 3. 否则除非 e 为负数, 上式不能成立.

当 $n=3$ 时, 有 $1/r=1/6+1/e$. 此时 r 仅可取 3, 4, 5, 相应的 e 为 6, 12, 30. 分别对应于球内接正四面体、正八面体、正二十面体在球面上产生的球心射影.

当 $r=3$ 时, 有 $1/n=1/6+1/e$. 此时 n 仅可取 3, 4, 5, 相应的 e 为 6, 12, 30. 分别对应于球内接正四面体、正六面体、正十二面体在球面上产生的球心射影.

当 $n=2$ 时, 有 $r=e$, 从而 $v=2, e=f$. 两个顶点位于南北两极, 各面是全等的球面正二角形.

当 $r=2$ 时, 有 $n=e$, 从而 $f=2, e=v$. 球面被等分为 2 个半球, 是上述 $n=2$ 情形的特例.

当 $n=1$ 或 $r=1$ 时, 无明显几何意义, 如图 1 所示. 证毕.

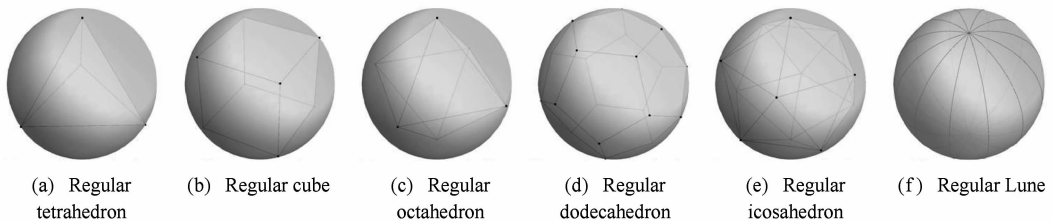


Fig. 1 Regular partitions of the sphere surface.

图 1 球面的正则剖分

定理 3. 设单位球被距其球心 O 为 $h(0 < h < 1)$ 的平面所截. 令 u, v 为闭截圆盘上任意 2 个相异点, u', v' 是它们的球面射影. 则存在常数 $c \geq 1$, 使得 $1/c \leq \widehat{|u'v'|} / |uv| \leq c$, 其中 $\widehat{|u'v'|}$ 表示连接 u', v' 的测地弧.

证明. 以球心 O 为坐标原点建立三维笛卡尔坐标系. 其中 z 轴为截面法线, 截圆盘圆心 o 的坐标为 $(0, 0, -h)$. 设 u, v 的坐标分别为 $(\rho_u \cos \theta_u, \rho_u \sin \theta_u, -h), (\rho_v \cos \theta_v, \rho_v \sin \theta_v, -h)$.

$\widehat{|u'v'|} / |uv|$ 是一个四元函数, 表达式较复杂, 不易直接计算其上下确界. 此处策略为利用闭集上连续函数达到其最大值、最小值的性质给出 $\widehat{|u'v'|} / |uv|$ 的上下界.

由截圆盘内任意点 u, v 决定的线段 uv , 或者本身位于截圆盘的某条直径上, 如图 2 中线段 $u_1 v_1$ 所示, 或者存在唯一一条截圆盘直径与之平行, 如图 2 中线段 $u_2 v_2$ 所示. 若为后一情形, 则设 uv 在该直径

上的垂直射影为 u_0v_0 如图 3 所示. 显然有: $|u_0v_0| = |uv|$. 仅需考虑 $uv(u_0v_0)$ 位于截圆盘的某条半径上的情形. 否则可分别考虑其被圆心 o 分割而得的两条线段.

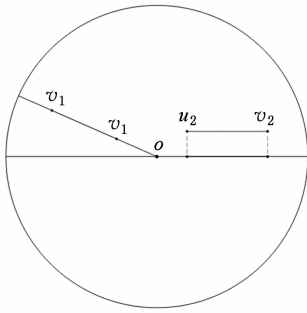


Fig. 2 uv 's position in the intersection disk.
图 2 uv 在截圆盘上的位置

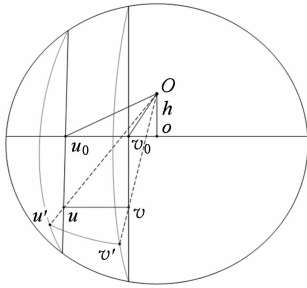


Fig. 3 uv and its projection.
图 3 uv 及其射影空格

由中心对称性,不妨设 uv 平行于 x 轴. 则 u_0 的坐标为 $(\rho_u \cos \theta_u, 0, -h)$, v_0 的坐标为 $(\rho_v \cos \theta_v, 0, -h)$. 从而:

$$\lim_{v \rightarrow u} \frac{|u'v'|}{|uv|} = \lim_{v \rightarrow u} \left\{ \left(\arctan \frac{|\rho_u \cos \theta_u|}{\sqrt{\rho_u^2 \sin^2 \theta_u + h^2}} - \arctan \frac{|\rho_v \cos \theta_v|}{\sqrt{\rho_v^2 \sin^2 \theta_v + h^2}} \right) \left| \rho_u \cos \theta_u - \rho_v \cos \theta_v \right| \right\} = \frac{\sqrt{\rho_u^2 \sin^2 \theta_u + h^2}}{\rho_u^2 + h^2}$$

这里 $v \rightarrow u$ 是指 v 沿线段 vu 逼近 u . 上式最后一步可由 Mathematica 等计算机软件辅助求解. 该极限值仅与点 u 的坐标 $(\rho_u \cos \theta_u, \rho_u \sin \theta_u, -h)$ 有关, 从而函数 $|u'v'|/|uv|$ 在距球心为 h 的截圆盘上点 u 处沿任意方向的极限值存在且相同. 令 B 表示 \mathbb{R}^4 中 $u=v$ 的点集, 则 B 为 $|u'v'|/|uv|$ 的可去间断点集.

线段长 $|uv|$ 以及弧长 $|u'v'|$ 显然都是 $\rho_u, \theta_u, \rho_v, \theta_v$ 的连续函数, 其中 $\rho_i \in [0, (1-h^2)^{1/2}]$, $\theta_i \in [0,$

$2\pi]$, $i \in \{u, v\}$. 则 $|u'v'|/|uv|$ 作为连续函数的商也是连续函数. 其定义域为 $[0, (1-h^2)^{1/2}]^2 \times [0, 2\pi]^2 - B$. 由前述极限分析可知, 可将函数 $|u'v'|/|uv|$ 的定义域延拓到 $[0, (1-h^2)^{1/2}]^2 \times [0, 2\pi]^2$ 而不失其连续性. $[0, (1-h^2)^{1/2}]^2 \times [0, 2\pi]^2$ 是 \mathbb{R}^4 中有界闭集, 其上连续函数 $|u'v'|/|uv|$ 达到最大值 c_u 、最小值 c_l . 取 $c = \max(1/c_l, c_u) \geq 1$, 得 $1/c \leq |u'v'|/|uv| \leq c$.
证毕.

常数 c 与参数 h 相关, 称为射影变形系数. 数值实验显示 $c=1/h$. 不过对本文而言, 当前的结论已经堪用. 由于球面的同构性, 定理 3 对非单位球亦成立. 该定理表明: 从截圆盘到球面的射影变换以及从球面到截圆盘的逆射影变换均满足利普希茨 (Lipschitz) 条件.

2.2 球面上小尺度 TSP 的 PTAS

设有 \mathbb{R}^3 中单位球面, 其球心 O 位于坐标原点. 当前 TSP $^\circ$ 问题实例记为 I° , 顶点数 $v(I^\circ) = n$.

2.2.1 小尺度 TSP $^\circ$ 实例

定义 1. 若存在开半球面完全覆盖 I° , 则称 I° 为一个 I° 小尺度 TSP $^\circ$ 实例.

定义 2. 一个不过球心的平面截球面, 若 I° 位于所截得的 (劣) 闭球冠上, 而 O 位于截平面之异于 I° 的一侧, 则称该平面为 I° 的一个分离平面.

注意 I° 中顶点可以位于分离平面上, 而球心 O 则不能. 一个 TSP $^\circ$ 实例有分离平面当且仅当其为小尺度实例. 判断给定平面是否分离平面可在 $\Theta(n)$ 时间内以逐点检验的方式完成.

定义 3. 小尺度 TSP 实例 I° 所有的分离平面中, 距球心 O 最远者称为 I° 的支撑平面. 支撑平面上被球面所截得的圆盘称为 I° 的支撑圆盘.

定理 4. 令 I° 为小尺度 TSP $^\circ$ 问题实例. 若 F 为一个支撑平面, 则关于 F 所确定的支撑圆盘的边界圆, 下述两结论之一必成立:

- 1) 边界圆仅包含 I° 中 2 个顶点, 且两者恰为该圆某条直径的端点;
- 2) 边界圆至少包含 I° 中 3 个顶点, 且该圆上覆盖这些顶点的最短弧所对应的圆心角不小于 π (存在 3 个点形成非钝角三角形).

证明. 若边界圆不含 I° 中任意顶点, 则可沿 F 的球心法线方向平移 F , 使其远离球心 O 而逼近 I° . 这样就得到了比 F 距球心 O 更远的分离平面. 与 F 为支撑平面矛盾.

若边界圆仅含 I° 中 1 个顶点,不难想象,在保持该顶点位于平面 F 上的同时,适当旋转 F ,可以得到比 F 距球心 O 更远的分离平面.再次矛盾.

若边界圆仅含 I° 中 2 个顶点,且两者不是支撑圆盘边界圆某条直径的两个端点,则以两点连线为轴旋转 F ,可以得到比 F 距球心 O 更远的分离平面.依然矛盾.

若边界圆至少包含 I° 中 3 个顶点,且该圆上覆盖这些顶点的最短弧所对应的圆心角小于 π ,则以该弧所对应的弦为轴,适当旋转 F ,可得到比 F 距球心 O 更远的分离平面.矛盾依旧. 证毕.

定理 4 可作如下直观解释:想象一个分离平面被一个作用于其截圆盘中心的力所拉动,迫使其远离球心.而 I° 中顶点则视为支点,阻挡其运动.则仅当碰到 2 个顶点恰位于截圆盘的某条直径上,或者有 3 个构成锐角三角形的顶点形成一个稳定支撑之时,该平面才能固定下来而不被外力继续拉动.

算法 1 判断给定 TSP $^\circ$ 实例 I° 是否小尺度,若是则亦给出一个支撑平面.

算法 1. 小尺度 TSP $^\circ$ 实例支撑平面算法.

输入:TSP $^\circ$ 实例 I° ;

输出: I° 的一个支撑平面.

- ① 计算 I° 在 \mathbb{R}^3 中的凸壳 $\text{conv}(I^\circ)$
- ② for $\text{conv}(I^\circ)$ 的每条棱 do
- ③ if 以该棱为直径的球面圆所在平面是分离平面 then
- ④ 将该面加入分离平面集;
- ⑤ else
- ⑥ 舍弃该棱;
- ⑦ end if
- ⑧ end for
- ⑨ for $\text{conv}(I^\circ)$ 的每个面 do
- ⑩ if 该面是分离平面 then
- ⑪ 将该面加入分离平面集;
- ⑫ else
- ⑬ 舍弃该面;
- ⑭ end if
- ⑮ end for
- ⑯ if 分离平面集为空集 then
- ⑰ I° 不是小尺度实例;
- ⑱ else
- ⑲ 返回分离平面集中距球心 O 最远的平面.
- ⑳ end if

先看算法 1 的正确性.由 $\text{conv}(I^\circ)$ 的凸性可知, I° 中任意两点所确定的线段,或者位于 $\text{conv}(I^\circ)$ 的

表面上,或者穿越 $\text{conv}(I^\circ)$ 所围凸多面体的内部.若为后一种情形,则任何通过该线段的平面显然不可能分离 I° 和球心.对前一种情形,该线段可能落于 $\text{conv}(I^\circ)$ 某个面的内部成为该面的弦,也可能落于其某个面的边界上,从而成为 $\text{conv}(I^\circ)$ 的一条棱,两者都在算法 1 的考虑范围之内.类似地, I° 中任意 3 点所确定的平面,若不是 $\text{conv}(I^\circ)$ 的面,则必将穿越 $\text{conv}(I^\circ)$ 所围凸多面体的内部,从而不可能分离 I° 和球心.则由定理 4 可知,算法 1 没有遗漏任何可能的支撑平面.正确性确认完毕.

再来分析算法 1 的时间复杂度.

1) 利用凸壳算法,如文献[21],行①可在 $\Theta(n \log n)$ 时间内完成.

2) 凸壳为简单多面体的表面,可嵌入平面,从而有 $e \leq 3v - 6$.也就是说 $\text{conv}(I^\circ)$ 有 $O(n)$ 条棱.行②至多循环 $O(n)$ 次.

3) 对以 $\text{conv}(I^\circ)$ 的棱为直径的球面圆所在平面,若 I° 中存在顶点位于该面的异侧,则该棱的 2 个邻面的异于该棱端点的顶点必位于该面的异侧.各选一个顶点为代表,判断两者及球心 O 的相对位置,则可断定该面是否分离平面.行③~⑦的一次执行仅需常数时间.

4) 将 $e \leq 3v - 6$ 代入欧拉公式 $v - e + f = 2$, 得 $f = e - v + 2 \leq 3v - 6 - v + 2 = 2v - 4$. 即 $\text{conv}(I^\circ)$ 有 $O(n)$ 个面.行⑨至多循环 $O(n)$ 次.

5) 对 $\text{conv}(I^\circ)$ 的每个面, I° 的所有顶点同样全部位于其同一侧.所以可以任选 I° 中一个非该面上的顶点,通过其与球心相对于该面的位置来判断该面是否分离平面.但问题在于, $\text{conv}(I^\circ)$ 的某些面可能包含多达 $O(n)$ 个 I° 中顶点,所以最差情形下依然需时 $O(n)$ 才能确保正确判定这些面是否分离平面.解决的办法如下:注意到 I° 的任意顶点 u 恰为 $d(u)$ (u 的度) 条棱的端点,每条棱为 2 个相邻面的公共边,所以如果 I° 的每个顶点在 $\text{conv}(I^\circ)$ 的每个面的每条棱上的一次出现计数一次,则共有 $\sum_{u \in I^\circ} 2d(u) = 4e$ 次出现.平摊到 $\text{conv}(I^\circ)$ 的 $O(n)$ 个面上,行⑨~⑮可在 $\Theta(n)$ 时间内完成.

6) 分离平面集至多包含 $O(n) + O(n) = O(n)$ 个面,故行⑯~⑳可在 $O(n)$ 时间内完成.

从而算法 1 总的运行时间为 $\Theta(n \log n)$.一般而言,判断一个面是否分离平面需时 $O(n)$,故对行⑨~⑮运行时间的平摊分析将算法 1 的时间复杂度上界由 $O(n) \times O(n) = O(n^2)$ 降为 $\Theta(n \log n)$.

2.2.2 小尺度 TSP $^\circ$ 之 PTAS 的构造

本 PTAS 首先将小尺度 TSP $^\circ$ 实例 I° 逆向球心

射影到其支撑圆盘上,得到 $TSP^{2-Euclid}$ 实例 I ,对 I 进行扰动使其顶点均有整值坐标,得实例 P ,之后将 P 重新射影到球面上. 剩余的步骤与 $TSP^{2-Euclid}$ 的 PTAS 相同. 参考图 4 所示. 由于球面、平面之间射影变形

的不规则性,无法保证实例 I 的近似解直接射影到球面后依然是 I° 的(有近似性保证的)近似解. 故实例 I 仅用于构造剖分网格. 也就是说,本近似方案不是一个从 TSP° 到 $TSP^{2-Euclid}$ 的 PTAS 归约^[22].

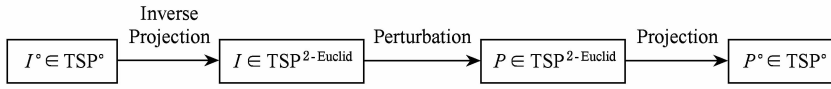


Fig. 4 Transformations of a TSP instance.

图 4 TSP 实例变换

详细步骤如下:

1) 最小边界正方形

找到一个包含 I° 的最小球面边界正方形远非平面情形下那样显然,算法 2 可以完成该工作.

算法 2. 小尺度 TSP° 实例最小边界正方形算法

输入:小尺度 TSP° 实例 I° ;

输出: I° 的一个最小边界正方形 S° .

- ① 调用算法 1 计算 I° 的支撑平面;
- ② if 支撑圆盘边界圆上仅包含 I° 中 2 个顶点 then
- ③ 令 S 为支撑圆盘上以此二顶点为对顶点的正方形;
- ④ else
- ⑤ 将 I° 的所有顶点逆向球心射影到支撑圆盘,得点集 P ;
- ⑥ 计算 P 的二维凸壳 $conv_{2D}(P)$;
- ⑦ 调用旋转卡壳算法^[23] 计算包含 $conv_{2D}(P)$ 的最小正方形并赋值于 S ;
- ⑧ end if
- ⑨ 将 S 球心射影到球面,得 S° .

易见球冠到支撑圆盘的球心逆射影是一个同胚映射,因而算法 2 正确计算了 I° 的一个最小边界正方形. 设所得正方形 S 之边长为 l ,则 I° 上最优哈密顿圈的长度 $L^*(I^\circ) > 2dia(I^\circ) > 2l$.

算法 2 中调用算法 1 需时 $\Theta(n \log n)$,逆射影需时 $\Theta(n)$,求二维凸壳需时 $\Theta(n \log n)$,旋转卡壳算法需时 $\Theta(n)$. 所以本步共耗时 $\Theta(n \log n)$.

2) 球面小尺度 TSP 的 PTAS 第 1 阶段

本步骤包含顶点扰动、递归剖分、设置端口 3 个操作.

对 I 进行尺度缩放,使得 $l = 4cn/\epsilon$ 成立. 此时有 $L^*(I^\circ) > 2l = 8cn/\epsilon$. 将每个点移动到距其最近的奇数坐标点. 记扰动后的 TSP 实例为 P . 每个点至多移动 $\sqrt{2}$. I 中不同点可能被移动到 P 中同一个点,故 $|P| \leq n$.

不失一般性,假设 $l = 2cn/\epsilon = 2^k$. 对平面正方形

S 进行递归剖分,直至叶子正方形仅含一个 TSP 顶点或者其大小为 2×2 . 如此得到一个正方形的二叉树. 其中所含正方形总数为: $O(\text{包含 TSP 顶点的正方形数量} \times \text{树高}) = O(n \log n)$. 剖分线被标定层次,层数 $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$.

将第 i 层剖分线均匀切割为 $2^i m$ 个等长线段,其中 $m = c \log n/\epsilon$. 这些线段的端点称为端口. 二叉树中每个正方形至多有 $4m+4$ 个端口. 故端口总数为: $O(n \log n \times (4m+4)) = O(n \log^2 n)$. 相比平面情形,端口加细 c 倍,以补偿射影过程中可能产生的至多 c 倍的拉伸.

本步骤共耗时 $O(n \log^2 n)$.

3) 二叉树射影

将 P 射影到球面上,得到 TSP° 实例 P° . 相比 P , P° 每个点至多移动 $\sqrt{2}c$. 由三角不等式,每条弧的长度至多变化 $2\sqrt{2}c$. P° 与 P 所含顶点数相同. I° 中每个哈密顿圈在 P° 中有一个对应的哈密顿圈,两者长度至多相差 $2\sqrt{2}cn$. I° 的一个最优哈密顿圈所对应的 P° 中哈密顿圈未必是最优的. 但有下述结论成立:

定理 5. $L^*(P^\circ) \leq L^*(I^\circ) + 2\sqrt{2}cn$.

证明. 因为

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, (n-1)!/2\},$$

$$L(P_i^\circ) \leq L(I_i^\circ) + 2\sqrt{2}cn;$$

$$\exists k \in \{1, 2, \dots, (n-1)!/2\},$$

$$L(P_k^\circ) \leq L(I_k^\circ) + 2\sqrt{2}cn = L^*(I^\circ) + 2\sqrt{2}cn.$$

所以

$$L^*(P^\circ) \leq L^*(P_k^\circ) \leq L^*(I^\circ) + 2\sqrt{2}cn.$$

证毕.

若对任意的 $\epsilon_p > 0$, 能够找到 P° 的近似比为 $(1+\epsilon_p)$ 的解 T_p , 则对于 I° 中未经扰动的哈密顿圈 T , 有:

$$L(T) \leq L(T_p) + 2\sqrt{2}cn \leq$$

$$\begin{aligned}
 & (1 + \epsilon_p)L^*(P^\circ) + 2\sqrt{2}cn \leq \\
 & (1 + \epsilon_p)(L^*(I^\circ) + 2\sqrt{2}cn) + 2\sqrt{2}cn = \\
 & (1 + \epsilon_p)L^*(I^\circ) + (2 + \epsilon_p)2\sqrt{2}cn < \\
 & (1 + \epsilon_p)L^*(I^\circ) + (2 + \epsilon_p)\epsilon L^*(I^\circ)/\sqrt{8} = \\
 & (1 + \epsilon_p + \frac{(2 + \epsilon_p)\epsilon}{\sqrt{8}})L^*(I^\circ) < \\
 & (1 + \epsilon)L^*(I^\circ).
 \end{aligned}$$

最后一个不等式成立是由于 ϵ_p 可以任意小, 故 T 为 I° 的一个 $(1 + \epsilon)$ 近似解。

令 S° 为平面正方形 S 的球面射影, 将 S 中正方形四叉树及其上端口射影到 S° 上, 得到 P° 的一个球面四叉树。

本步共耗时 $O(n \log^2 n)$ 。

4) 球面小尺度 TSP 的 PTAS 第 2 阶段

算法剩余部分所包含的动态规划、端口最优哈密顿圈拉直、随机化以及退随机等操作与平面情形完全一致, 这里不再赘述, 可参阅文献[16]获取更多信息。

该步骤可在 $O(n(\log n)^{O(1/\epsilon)})$ 时间内完成。

综合上面 4 步可知, 小尺度 TSP $^\circ$ 实例多项式时间近似方案的时间复杂度为 $O(n(\log n)^{O(1/\epsilon)})$ 。

2.3 球面上一般 TSP 实例的多项式时间近似方案

若 I° 不是小尺度 TSP $^\circ$ 实例, 则可用一个球内接正四棱柱的侧面取代前述平面正方形 S 作为射影基点, 首先执行如下算法:

算法 3. 非小尺度 TSP $^\circ$ 实例的随机边界圆筒算法。

输入: TSP $^\circ$ 实例 I° ;

输出: I° 的一个边界圆筒。

① 生成随机法向量 \mathbf{n}_1 ;

② 找到一个顶点 v_1 , 其到 \mathbf{n}_1 的直线距离为 I° 所有顶点中最小, 该距离记为 r ;

③ 返回以 \mathbf{n}_1 为轴、半径 $r' = r/\sqrt{2-r^2}$ 的圆筒。

算法 3 返回的半径为 r' 的圆筒称为 I° 的细边界圆筒。见图 5, 6 所示。而图 6 中半径为 r 的圆筒称为 I° 的粗边界圆筒。细边界圆筒开口较小, 完全覆盖粗边界圆筒。顶点 v_1 位于粗边界圆筒的一个边界圆上 (不妨假设为位于 \mathbf{n}_1 正方向的边界圆)。 I° 中必有其他顶点 v_2 位于以 $-\mathbf{n}_1$ 为正方向的闭半球面上, 否则 I° 将成为小尺度 TSP $^\circ$ 实例。从而有 $dia(I^\circ) \geq \arccos(r)$ 成立。若 I° 中恰有顶点位于随机法线 \mathbf{n}_1 上, 则算法 3 无法正确返回一个细边界圆筒。但易知该事件发生的概率为 0。

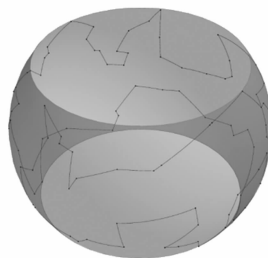


Fig. 5 A spherical TSP instance.

图 5 一个球面 TSP 实例

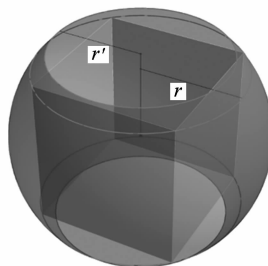


Fig. 6 The boundary circular barrel of the instance in Fig. 5.

图 6 图 5 中 TSP 实例的边界圆筒

接下来随机选择粗边界圆筒的一个内接正四棱柱面。在其每个面上构造递归剖分网格并射影到球面上。易见所得球面剖分网格恰可被细边界圆筒完全覆盖。其他步骤与 2.2 节中一致, 故不再详述。

3 曲面上 TSP 具有多项式时间近似方案的充分条件

首先回顾一下平面 TSP 之 PTAS 的特征:

1) 长方形是正方形的有限形变。故由 2.2.2 节中的剖分分析, 可基于由 (每层) 全等长方形构成的递归剖分树构造平面 TSP 之 PTAS。

2) 对正方形或长方形剖分树而言, 分支因子取 4 最为自然, 但 $k_1 \times k_2$ (k_1, k_2 为不小于 2 的自然数) 同样可行。

3) 在平面递归剖分中剖分线为直线, 在球面递归剖分中剖分线为测地弧。那么剖分线必须是测地线吗? 答案是否定的。图 7 展示了一个由 76 块全等骨牌铺砌而成的 19×28 长方形。该长方形显然可以铺砌为正方形。而每块骨牌则由 7 个小正方形组成。因此, 由一个正方形根节点出发, 可以构造一个由此种骨牌 (各层骨牌大小不同) 构成的剖分树。此时剖分线为折线, 连接骨牌边界上不同端口的直线未必完全落于骨牌内部。

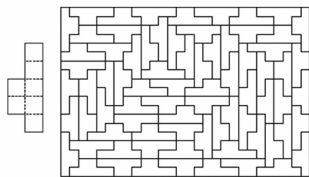


Fig. 7 A non-regular partition of a rectangle^[24].

图 7 矩形的非正则剖分^[24]

接下来考虑一般曲面上 TSP 的 PTAS.

定理 6. 若曲面上任意两点间仅有一条测地线, 则其上 2 个相邻闭凸集间的边界线必为测地线.

证明. 令 A, B 为曲面上两个相邻的闭凸集, P 为两者间的边界线, x, y 为 P 中任意两点. 再令 G_{xy} 为 x, y 之间的唯一测地线. 由于 A 与 B 既凸且闭, $G_{xy} \in A$ 且 $G_{xy} \in B$. 从而 $G_{xy} \in A \cap B = P$. 证毕.

定理 7. 设 S 为曲面上由测地距离定义的距离空间, 其中任意两点间有唯一测地线, 利普希茨连续函数 $f: [0, 1]^2 \mapsto S$ 将凸集映射成凸集. 对 S 上的 TSP 问题 TSP^S , 若函数 f 和 S 上任意两点距离都是多项式时间可计算的, 则 $TSP^S \in PTAS$.

证明. 首先证明 f 将 $[0, 1]^2$ 上的直线映成 S 上的测地线. 令 x_0, x_1 为 $(0, 1)^2$ 上 2 个不同的点, 而 $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1)$ 为两者在 S 上的像点. 若 $y_0 = y_1$, 则结论显然成立. 否则由 f 的连续性可知, 线段 $x_0 x_1$ 在 f 下的像 $\widetilde{y_0 y_1}$ 为 S 上的一条连续曲线. 令 R_ϵ 为圆角矩形 $\{x: x \in [0, 1]^2, |x, x_0 x_1| \leq \epsilon\}$, R_ϵ^1 为 $\{y: y \in S, |y, \widetilde{y_0 y_1}| \leq c\epsilon\}$, 其中 c 为利普希茨常数. 则 R_ϵ^1 为有界闭集且 $f(R_\epsilon) \subseteq R_\epsilon^1$. 因为 R_ϵ 为凸集, f 将凸集映射成凸集, 所以 R_ϵ^1 包含连接 y_0, y_1 的测地线. 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $R_\epsilon \rightarrow xy$, 而 $R_\epsilon^1 \supseteq \widetilde{y_0 y_1}$ 恒成立. 故曲线 $\widetilde{y_0 y_1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} R_\epsilon^1$ 即为 S 上连接 y_0, y_1 的测地线.

函数 f 将 $[0, 1]^2$ 的正方形二叉剖分树映射成 S 的一棵凸剖分树, 每条剖分线被拉长至多 c 倍. 注意到 f 和 S 上任意两点距离多项式时间可计算, 故 2.2 节中的小尺度 TSP^S 实例的多项式时间近似方案可以原样照搬到 TSP^S 上. 证毕.

推论 1. 若一个曲面可被剖分为常数个分片, 各分片均满足定理 7 中条件, 则该曲面上的 TSP 问题存在多项式时间近似方案.

4 结 论

本文首先给出了曲面上 TSP 问题具有 NP 难

解性的一个充分条件, 接着证明了 $TSP^S \in PTAS$, 最后将该 PTAS 推广到一类曲面上. 高维情形下亦有相同结论.

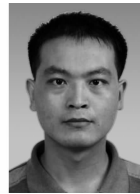
平面上 TSP 的 PTAS 所采用的递归剖分结合动态规划的方法已经成功用于多个其他欧氏组合优化问题. 有鉴于此, 我们乐观期待本文所做曲面上的推广也适用于这些问题.

关于曲面上 TSP 问题的 NP 难解性, 本文的结果是初步且冗繁的, 一般性的深刻结论尚有待深入研究. 对于小尺度 TSP^S , 本文给出了其最小边界正方形的求解算法. 而对于非小尺度 TSP^S , 则仅给出了计算其边界圆桶的一个随机算法. 下述最优边界圆桶问题有待解决: 寻找一个轴线过球心、半径尽可能大的圆柱面, 使得给定非小尺度 TSP^S 实例的顶点全部位于球面被该圆柱面所截而得的圆筒上.

参 考 文 献

- [1] Held M, Karp R. A dynamic programming approach to sequencing problems [J]. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1962, 10(1): 196-210
- [2] Garey M, Graham R, Johnson D. Some NP-complete geometric problems [C] // *Proc of the 8th ACM Symp on Theory of Computing*. New York: ACM, 1976: 10-22
- [3] Papadimitriou C H. The Euclidean TSP is NP-complete [J]. *Theoretical Computer Science*, 1977, 4(3): 237-244
- [4] Kabadi S N. Polynomially Solvable Cases of the TSP [M] // Gutin G, Punnen A P. *The Traveling Salesman Problem and Its Variations*. New York: Kluwer Academic, 2004: 489-584
- [5] Karp R M. Probabilistic analysis of partitioning algorithms for the traveling-salesman problem in the plane [J]. *Mathematics of Operations Research*, 1977, 2(3): 209-224
- [6] Bockenhauer H J, Hromkovic J, Kneis J, et al. The parameterized approximability of TSP with deadlines [J]. *Theory of Computing Systems*, 2007, 41(3): 431-444
- [7] Monnot J. Differential approximation results for the traveling salesman and related problems [J]. *Information Processing Letters*, 2002, 82(5): 229-235
- [8] Monnot J, Vangelis Th P, Sophie T. Differential approximation results for the traveling salesman problem with distances 1 and 2 [J]. *European Journal of Operational Research*, 2003, 145(3): 557-568
- [9] Punnen A, Margot F, Kabadi S. TSP heuristics: Domination analysis and complexity [J]. *Algorithmica*, 2003, 35(2): 111-127
- [10] Gutin G, Yeo A, Zverovitch A. Exponential Neighborhoods and Domination Analysis for the TSP [M] // Gutin G, Punnen A P. *The Traveling Salesman Problem and Its Variations*. New York: Kluwer Academic, 2004: 223-256

- [11] Wan Yingyu, Zhou Zhi, Chen Guoliang, et al. SizeScale: New algorithms for the traveling salesman problem [J]. Journal of Computer Research and Development, 2002, 39(10): 1294-1302 (in Chinese)
(万颖瑜, 周智, 陈国良, 等. SizeScale: 求解旅行商问题(TSP)的新算法[J]. 计算机研究与发展, 2002, 39(10): 1294-1302)
- [12] Ji Junzhong, Huang Zhen, Liu Chunlian, et al. An ant colony algorithm based on multiple grain representation for the traveling salesman problems [J]. Journal of Computer Research and Development, 2010, 47(3): 434-444 (in Chinese)
(冀俊忠, 黄振, 刘椿年, 等. 基于多粒度的旅行商问题描述及其蚁群优化算法[J]. 计算机研究与发展, 2010, 47(3): 434-444)
- [13] Sahni S, Gonzalez T. P-complete approximation problems [J]. Journal of the ACM, 1976, 23(3): 555-565
- [14] Christofides N. Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem, 388 [R]. Pittsburgh: Carnegie-Mellon University, 1976
- [15] Papadimitriou C H, Vempala S. On the approximability of the traveling salesman problem [J]. Combinatorica, 2006, 26(1): 101-120
- [16] Arora S. Polynomial-time approximation schemes for euclidean TSP and other geometric problems [J]. Journal of the ACM, 1998, 45(5): 753-782
- [17] Mitchell J S B. Guillotine subdivisions approximate polygonal subdivisions: A simple polynomial-time approximation scheme for geometric TSP, k -MST, and related problems [J]. SIAM Journal on Computing, 1999, 28(4): 1298-1309
- [18] Arora S. Approximation schemes for NP-hard geometric optimization problems: A survey [J]. Mathematical Programming, 2003, 97(1-2): 43-69
- [19] Remy J M. Approximation schemes for geometric problems [D]. Zürich: Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 2007
- [20] Zhao Weizhong, Feng Haodi, Zhu Daming. Improvement and implementation of a polynomial time approximation scheme for Euclidean traveling salesman problem [J]. Journal of Computer Research and Development, 2007, 44(10): 1790-1795 (in Chinese)
(赵卫中, 冯好娣, 朱大铭. 欧氏空间货郎担问题的一个多项式时间近似方案的改进与实现[J]. 计算机研究与发展, 2007, 44(10): 1790-1795)
- [21] Preparata F P, Hong S J. Convex hulls of finite sets of points in two and three dimensions [J]. Communication of the ACM, 1977, 20(2): 87-93
- [22] Gonzalez T F. Handbook of approximation algorithms and metaheuristics [M]. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2007
- [23] Toussaint G. Solving geometric problems with the rotating calipers [C] //Proc of IEEE Mediterranean Electrotechnical Conf. Piscataway, NJ: IEEE, 1983: 1-10
- [24] Brass P, Moser W, Pach J. Research problems in discrete geometry [M]. Berlin: Springer, 2005: 162



Wang Gang, born in 1978. PhD candidate. His current research interests include computational geometry and approximation algorithms.



Luo Zhigang, born in 1962. PhD, professor and PhD supervisor. His current research interests include parallel computing and bioinformatics (zhigang_luo@sina.com).