

基于最大后验概率和鲁棒估计的图像恢复推广变分模型

肖亮^{1,2} 韦志辉^{1,2} 吴慧中¹

¹(南京理工大学计算机科学与技术学院 南京 210094)

²(南京理工大学应用数学系 南京 210094)

(xtxiaoliang@163.com)

A Generalized Variational Image Restoration Model Based on MAP and Robust Estimation

Xiao Liang^{1,2}, Wei Zhihui^{1,2}, and Wu Huizhong¹

¹(School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094)

²(Department of Applied Mathematics, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094)

Abstract Starting from the viewpoint of maximum *a posteriori* (MAP) and MRF theory, a generalized variational functional model for image restoration is established in this paper. In this model, a hybrid image regularization term and image fidelity term are included. For image fidelity term, the distribution of noise is treated as the generalized Gaussian density, and thus the shape parameter is estimated by a maximum likelihood method to automatically choose the suitable L^p norm as the image fidelity criteria. Assuming that the gradient of images is a member of ϵ -contaminated normal distributions, an image prior model in the form of total variational integral and Dirichlet integral is proposed using the robust estimation method. Due to the convexity of the proposed energy functional, the existence of the minimizing solution of such functional is discussed. Finally a weighted gradient descent flow is developed for image de-noising with an iterative algorithm based on semi-point scheme. Experimental results show that the model can automatically distinguish the statistical distribution of noise and has good performance in image restoration, including Gaussian noise and impulse noise pollution. Compared with other variation methods, the performance analysis and evaluation is made by calculating the peak of signal noise ratio (PSNR) and peak of edge preservation ability (PEPA).

Key words image restoration; maximum *a posteriori* (MAP); robust estimation; variation method; partial differential equation (PDE)

摘要 基于最大后验概率和 MRF 理论的图像恢复描述框架, 提出一个面向图像恢复的推广变分模型. 模型中将噪声建模为广义正态分布, 利用最大似然法估计形状参数自动选择合适的范数作为数据保真项; 将图像梯度场的分布建模为混合密度类, 利用鲁棒估计理论构造一个耦合全变差积分和 Dirichlet 积分的图像先验模型作为正则化项. 利用推广泛函的凸性, 讨论了该推广模型的最优解存在性. 最后提出结合梯度加权最速下降和半点格式的数值迭代算法. 实验结果表明, 推广模型能自动区分污染图像中的噪声分布特性, 对于高斯噪声和脉冲噪声的污染图像都能取得很好的恢复效果. 通过计算峰值信噪比和边缘保护指数, 分析和评价了推广模型与目前其他变分方法的性能.

关键词 图像恢复; 最大后验概率; 鲁棒估计; 变分法; 偏微分方程

中图法分类号 TP391

图像恢复是图像处理的经典问题,需要在噪声去除的同时能够有效地保持图像的细节.由于噪声和细节往往分布在高频区域,因此传统的线性滤波方法在去除噪声的同时容易模糊图像的边缘.基于偏微分方程(PDE)和变分模型方法近几年已开始大量应用于图像恢复等图像处理问题,其高质量的处理效果已引起国内外研究者的广泛关注^[1-14]. PDE方法主要是从有选择性非线性扩散的角度设计各类低阶、高阶或者低阶与高阶综合的偏微分方程,实现边缘保持的图像去噪.该类方法以 Perona 和 Malik 提出的 P-M 扩散^[1]、Weickert 等人提出基于图像结构张量的各向异性边缘增强扩散和相关-增强扩散方程为代表^[2-4]. 变分方法本质上是一种正则化方法,主要是利用图像光滑性假设以及数据保真约束,构建合适的能量泛函的最优化过程寻求最佳的恢复图像,典型的模型包括 Rudin 和 Osher 等人提出的全变差模型^[5-6]、Mumford 和 Shah 等人提出的 M-S 模型^[7-9]等. 由于最优化该类能量泛函一方面可以通过变分法导出的偏微分方程进行求解,又可以通过动态规划、遗传算法、模拟退火等多种途径求解,而且能够很方便地推广到小波^[10]、几何多尺度变换域^[11],因此其研究一直以来都是国际上流行的热点课题.

考虑从观察到的含噪图像数据 u_0 中恢复理想的未知图像 u ,在大多数文献^[1-14]中基于如下的加性噪声模型:

$$u_0 = u + n, \quad (1)$$

其中 n 为随机变量,表示具有某种概率分布的噪声.

图像恢复问题实质上从 u_0 中估计合适的 u ,这往往导致一个不适定问题.基于正则化理论的变分模型,通过引入图像数据的保真项控制恢复图像与原始图像的相似性,图像的正则项保障恢复图像的光滑性,提供了一种根据能量项叠加的泛函最小化全局优化双向机制,为该不适定问题提供了一条有效途径.其中,图像恢复的变分问题为

$$\hat{u} = \arg \min_u \left\{ E(u) = \int_{\Omega} \varphi(|\nabla u|) dx + \lambda \|u - u_0\|_2^2 \right\}, \quad (2)$$

其中:第1项为图像的正则化项,是对图像正则性的先验假设;第2项为数据保真项.正则化项中, $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ 为特定的光滑函数,它实质上决定采取何种正则化算子.

目前图像恢复的变分模型研究存在两条研究思

路:其一是改进和提出合适的图像正则化项;其二是改进和提出合适的的数据保真项.对于图像正则化项,Tikhonov 正则化方法中取 Sobolev 模型 $SO(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$;Rudin 和 Osher 提出的全变差正则化方法^[5]中取 $TV(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx$.研究表明,Sobolev 模型适合于图像中的平坦区域,容易模糊图像中边缘等重要的视觉特征,而全变差图像模型能够较好保持图像边缘.由于图像被认为是包含边缘曲线的分片平坦区域组成,因此有必要将两者有效地结合或者根据图像结构自适应选择合适的正则化算子^[12-13].对于数据保真项,一般选择如式(2)中的 L^2 范数.然而目前的研究表明^[14], L^2 范数对高斯噪声效果很好,但对混合噪声或者重尾分布噪声次之,Laplace 分布的脉冲噪声更不好.

综合上述考虑,本文从最大后验概率和 MRF 理论出发,建立了一个能够较好地刻画图像结构,而且对噪声鲁棒的图像恢复变分模型.首先将图像的梯度模假设为两个密度混合形成的密度类,利用鲁棒统计学中的 Hubber 定理导出一个由二次函数和线性函数分段组成的鲁棒性密度,构造一个耦合全变差积分和 Dirichlet 积分的图像先验正则化项.然后将噪声建模为广义高斯分布(GGD),通过最大似然估计噪声 GGD 的形状参数和方差,导出一个自适应于噪声分布形状参数的数据保真项.最后根据 MAP 框架,将图像先验模型约束和数据模型约束结合起来,提出图像恢复问题的一个推广变分模型.实验结果表明,推广模型能自动区分污染图像中的噪声分布特性,对于不同类型的噪声污染图像都能取得很好的恢复效果.

1 图像恢复的推广变分模型

1.1 模型导出

假定未知图像 u 的先验概率为 $P(u)$,给定 u 时 u_0 的条件概率为 $P(u_0|u)$,则由贝叶斯框架下的 MAP 估计,

$$\hat{u} = \arg \max_u \{ \ln P(u_0|u) + \ln P(u) \} = \arg \min_u \{ -\ln P(u_0|u) - \ln P(u) \}. \quad (3)$$

先验概率模型 $P(u)$,实质上是图像的先验模型,它描述什么样的图像出现的概率大.条件概率模型 $P(u_0|u)$ 实质上是数据模型,它描述从给定 u 产生 u_0 的概率.根据 MRF 理论,先验概率模型

$P(u)$ 可表达为 MRF 中的 Gibbs 分布公式^[15],

$$P(u) = \frac{1}{Z} \exp\left\{-\frac{\Phi(u)}{\beta}\right\}. \quad (3)$$

式中常数 β 称为物理系统的温度, $\Phi(u)$ 定义为 $\Phi(u) = \sum_{c \in C} V_c(u)$ 的能量函数, $V_c(u)$ 是 MRF 中与簇关联的位势函数, Z 称为配分函数. 条件概率模型 $P(u_0 | u)$, 取决于噪声的统计分布. 假设噪声服从均值为零的广义高斯分布(GGD):

$$P(u_0 | u) = \frac{p}{2\sigma \Gamma(1/p)} \exp\left(-\frac{\|u_0 - u\|_p^p}{\sigma^p}\right), \quad (4)$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数, 即 $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$, $z > 0$, p, σ 分别为 GGD 的形状参数和标准方差, $\|\cdot\|_p^p$ 为 L^p 范数. 形状参数 p , 反映了噪声的分布类型, 当 $p=1$ 时退化为 Laplace 分布, 当 $p=2$ 时是高斯分布, 当 $0 < p < 1$ 时则为重尾分布, 当 $p \rightarrow \infty$ 时则可以近似为逼近均匀随机分布. 图 1 为广义高斯分布(从上到下 p 分别选为 3, 2.5, 2, 1.5, 1, 0.5, 0.2):

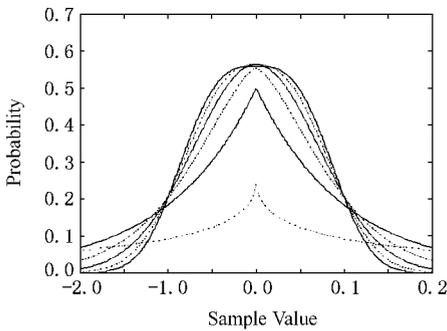


Fig. 1 Illustration of generalized Gaussian distribution with different shape parameters.

图 1 具有不同形状参数的广义高斯分布示意图

从而由式(3)中的 MAP 估计等价于

$$\hat{u} = \arg \min_u \{\Phi(u) + \lambda \|u - u_0\|_p^p\}, \lambda = \frac{\beta}{\sigma^p}, \quad (5)$$

定义变分积分函数的普遍表达 $\Phi(u) = \int_{\Omega} \varphi(|\nabla u|) dx$, 则式(3)可转化为如下变分问题:

$$\hat{u} = \arg \min_u \left\{ E(u) = \int_{\Omega} \varphi(|\nabla u|) dx + \lambda \|u - u_0\|_p^p \right\}. \quad (6)$$

其中从模型式(4)可以看出, 对于特定的图像恢复任务, 推广模型需要解决 3 个关键问题:

1) 位势函数 φ 与图像的正则化项相关, 决定

了梯度的范数如何选取, 因此如何选择合适的 φ 是第 1 个关键问题.

2) 形状参数 p 与污染图像的噪声特性相关, 第 2 个关键问题是如何自适应地根据噪声类型估计形状参数 p . 已确定合适的的数据保真 L^p 范数.

3) λ 为正项和保真项之间的权重参数, 由式(3), $\lambda \propto \frac{1}{\sigma^p}$, 因此需要 λ 的估计转化为噪声方差 σ 的估计问题.

1.2 Huber-M 估计法确定图像正则化项

下面, 运用鲁棒统计学中的 Huber M-估计方法建立本文的图像耦合正则化模型, 即选择合适的梯度范数确定合适的图像先验模型. 其基本思想是: 1) 对于图像而言, 其本质的特征几乎全部蕴藏在图像的梯度场; 2) 而图像的梯度模在大部分区域为一种固定的主密度分布, 少数区域为另一种密度分布; 3) 希望找到图像梯度场的概率密度函数的估计, 使得估计的密度函数是鲁棒的. 上述问题实质上是鲁棒估计问题. 考虑密度类 H , 它们是由两个密度的混合形成的: $P(s) = (1 - \epsilon)g(s) + \epsilon h(s)$, $g(s)$ 为某个固定的密度, $h(s)$ 是一个任意密度, 它们都关于原点对称. 混合的权值分别是 $(1 - \epsilon)$ 和 ϵ . 对这种类型的密度, 设 $\ln g(s)$ 是一个二次连续可微函数, 那么鲁棒估计的 Huber 定理^[16]表明类 H 中包含下面的鲁棒密度:

$$P_r(s) = \begin{cases} (1 - \epsilon)g(s_0) \exp\{-c(s_0 - s)\}, & \text{对 } s < s_0, \\ (1 - \epsilon)g(s), & \text{对 } s_0 \leq s < s_1, \\ (1 - \epsilon)g(s_1) \exp\{-c(s - s_1)\}, & \text{对 } s \geq s_1, \end{cases} \quad (7)$$

其中, s_0 和 s_1 是区间 $[s_0, s_1]$ 的端点, 在这个区间上, 单调函数 $-\frac{d \ln g(s)}{ds} = -\frac{g'(s)}{g(s)}$ 的绝对值以一个常数 c 为界, 这个常数满足如下归一化条件:

$$1 = (1 - \epsilon) \left(\int_{s_0}^{s_1} g(s) dz + \frac{g(s_0) + g(s_1)}{c} \right).$$

根据 Huber 定理可以构造各种鲁棒密度. 若选择 $g(s)$ 为零均值和方差为 1 的正态密度函数, $G(s)$ 为相应的分布函数, 对密度类 H , 那么密度

$$P_r = \frac{1 - \epsilon}{\sqrt{2\pi}} \exp(\varphi_k(s)) \quad (8)$$

在这个类中将是最鲁棒的. 其中 $\varphi_k(s)$ 为从这一鲁棒密度导出的损失函数为

$$\varphi_k(s) = \begin{cases} k |s| - \frac{k^2}{2}, & |s| > k \\ \frac{s^2}{2}, & |s| \leq k. \end{cases} \quad (9)$$

这个损失函数平滑地将一个二次函数和一个线性函数结合起来,对应的图像模型或者变分模型的正则项是界于 Tikhonov 模型和 TV 模型之间的一种折中模型. 模型中,参数 k 在鲁棒性方法中称作崩溃点. 崩溃点参数 k 的选择是至关重要的. 随着 k 值增加时,鲁棒估计允许更大的扰动,因此它会影响估计精度. 如果崩溃点太小,则估计值因为信息的丢失将是严重有偏的. 根据 Huber 在 1981 的研究^[16],参数 k 和 ϵ 之间存在下列关系:

$$\frac{2g(k)}{k} - 2G(-k) = \frac{\epsilon}{1-\epsilon}.$$

根据上述关系,如果已知密度类 H 的混合权值 ϵ 可以通过上式求出参数 k . 然而许多情况下, ϵ 的值是未知的. 此时可利用在完全高斯分布下的渐进相对有效性和崩溃点 k 之间的关系来确定参数 k 的选择. 渐进相对有效性可以表示为^[17]:

$$ARE = \frac{[2G(k) - 1]^2}{2[A(k) + k^2(1 - G(k))]},$$

式中 $A(k) = \int_0^k x^2 g(x) dx$. 因 ARE 介于 0.925 ~ 0.95 之间,此时反求 k 值介于 1.141 ~ 1.345 之间. 上述分析表明,从鲁棒统计的观点看,梯度的范数应该是 L^2 范数和 L^1 范数的一种耦合,耦合方式由式(9)决定,而崩溃点 k 是耦合方式的联结纽带.

1.3 最大似然估计法确定数据保真项

假设从图像中抽取了 L 个噪声样本 $n = (n_1, n_2, \dots, n_L)$,定义关于样本的似然函数为

$$L(n; \sigma, p) = \ln \prod_{i=1}^L \left\{ \frac{p}{2\sigma\Gamma(1/p)} \exp \left\{ -\frac{|n_i|^p}{\sigma^p} \right\} \right\}. \quad (10)$$

文献 18 的实验结果表明,最大似然估计法在估计大抽样样本和小抽样样本的 GGD 模型的统计参数非常有效. 求解似然函数最大化问题,可归结为多元函数求极值问题,最优解满足似然方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial L(n; \sigma, p)}{\partial \sigma} = -\frac{L}{\sigma} + \sum_{i=1}^L \frac{p |n_i|^p \sigma^{-p}}{\sigma} = 0, \\ \frac{\partial L(n; \sigma, p)}{\partial p} = \frac{L}{p} + \frac{L\psi(1/p)}{p^2} - \\ \sum_{i=1}^L \left(\frac{|n_i|}{\sigma} \right)^p \ln \left(\frac{|n_i|}{\sigma} \right) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

式中 $\psi(\cdot)$ 为 Digamma 函数,即 $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$. 上述非线性超越方程的解 $(\hat{\sigma}, \hat{p})$ 可以通过交错迭代的方法得到. 首先固定 $p > 0$, 得到方差的估计

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{p}{L} \sum_{i=1}^L |n_i|^p \right)^{1/p}, \quad (12)$$

将 $\hat{\sigma}$ 代入第 2 个方程,则形状参数 p 为下列方程的解:

$$1 + \frac{\psi(1/\hat{p})}{\hat{\sigma}} - \frac{\sum_{i=1}^L |n_i|^{\hat{p}} \log |n_i|}{\sum_{i=1}^L |n_i|^{\hat{p}}} + \frac{\log \left(\frac{\hat{p}}{L} \sum_{i=1}^L |n_i|^{\hat{p}} \right)}{\hat{p}} = 0, \quad (13)$$

可通过 Newton-Raphson 数值迭代法求解^[18]. 实验结果表明,仅需 3 次迭代,解的精度达到 10^{-6} .

上述统计参数估计算法只有在已知噪声样本时才可行,即需要从噪声污染的图像中抽取噪声样本. 这显然和图像恢复构成一对矛盾. 然而,由于变分问题可以转化为欧拉-拉格朗日方程的解,可通过梯度加权最速下降方法并设计相应的数值迭代算法求解. 因此,我们可以设置一个初始的 $\hat{\sigma}^{(0)}, \hat{p}^{(0)}$ 值,进行数值迭代 ($u^{(0)} \rightarrow u^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow u^{(k)} \rightarrow \dots \rightarrow u^{(n)}$),在迭代过程中的若干步骤中从残差图像 $u_0 - u^{(k)}$ 抽取噪声样本重新估计统计参数 $\hat{\sigma}^{(k)}, \hat{p}^{(k)}$,然后再继续后续迭代. 下面设计图像恢复算法.

2 恢复算法

根据以上论述,建立 Huber 变分泛函 $HB(u)$ = $\int_{\Omega} \varphi_k(|\nabla u|) dx$,由式(10),可知该积分泛函是耦合全变差积分和 Dirichlet 积分的变分模型. 进一步,在 Sobolev 空间 $H^1(\Omega)$ 上考虑,可知 Huber 变分积分泛函 $HB: H^1(\Omega) \rightarrow R^+$ 在 $H^1(\Omega)$ 有定义,凸且具有强制性. 根据泛函分析理论^[19],可知变分问题

$$\hat{u} = \arg \min_u \left\{ E(u) = \int_{\Omega} \varphi_k(|\nabla u|) dx + \lambda \int_{\Omega} |u - u_0|^p dx \right\} = \arg \min_u \left\{ \int_{|\nabla u| \leq k} |\nabla u|^2 dx + \int_{|\nabla u| > k} \left(k |\nabla u| - \frac{k^2}{2} \right) dx + \lambda \int_{\Omega} |u - u_0|^p dx \right\}, \quad (14)$$

当 $\lambda > 0$ 存在惟一解. 引入人工时间,相应的梯度下降流为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\frac{\varphi_k(|\nabla u|) \nabla u}{|\nabla u|} \right] - \lambda p |u - u_0|^{p-1} \text{sign}(u - u_0),$$

最后采用 Marquina 和 Osher 等人提出的梯度加权最速下降方法^[20]加快数值计算的迭代速度,得到改进的 PDE:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \lambda p |u - u_0|^{p-1} \text{sign}(u - u_0), \quad (15)$$

其中 $\mathbf{V} = \frac{\varphi_k'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u$, $\mathbf{V} = (V^1, V^2)$.

考虑到形状参数和方差的最大似然估计,进一步对式(8)利用时间步进法求解,其迭代形式为

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \Delta t |\nabla u^{(n)}| [|\nabla \cdot \mathbf{V}^{(n)}| + \frac{1}{\hat{\sigma}^p} \hat{p} |\nabla u^{(n)}| |u^{(n)} - u^0|^{p-1} \text{sign}(u^{(n)} - u^0)], \quad (16)$$

1) 式(16)中数值迭代的关键是对散度项选择恰当的离散形式. 为了达到较高的逼近精度,我们采取半点格式,其如图2所示:

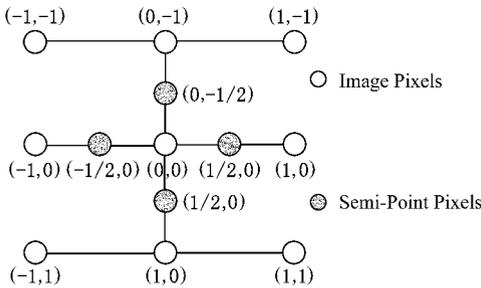


Fig. 2 Illustration of semi-point scheme.

图2 半点格式示意图

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_{(0,0)} = \frac{V_{(1/2,0)}^1 - V_{(-1/2,0)}^1}{h} + \frac{V_{(0,1/2)}^2 - V_{(0,-1/2)}^2}{h}.$$

2) 由于半点像素皆为假想像素,对任意半点像素 (i, j) : $j=0$, $|i| + |j| = 1/2$, 其微分、梯度、曲率等的离散采用如下策略:如果某半点像素在相应 i 方向或者 j 方向的像素为真实像素,则采用中心差商;若假想像素,采取 $\text{minmod}(\cdot)$ 格式 $\text{minmod}(\alpha, \beta) = 1/2 \text{sign}(\alpha) + \text{sign}(\beta) \min(|\alpha|, |\beta|)$.

下面简要说明半点像素离散时应采用的方法.

$$[u_x]_{1/2,0} = 1/2 (u_{(1,0)} - u_{(0,0)}),$$

$$[u_y]_{1/2,0} = \text{minmod}(1/2 (u_{(0,1)} - u_{(0,-1)}), 1/2 (u_{(0,1)} - u_{(0,-1)})),$$

$$D_x(|\nabla u|)_{1/2,0} = 1/2 (|\nabla u|_{(1,0)} - |\nabla u|_{(0,0)}),$$

$$D_y(|\nabla u|)_{1/2,0} = \text{minmod}(1/2 (|\nabla u|_{(0,1)} - |\nabla u|_{(0,-1)}), 1/2 (|\nabla u|_{(0,1)} - |\nabla u|_{(0,-1)})).$$

3) 对分母处的梯度模,为了避免出现零值,采取提升梯度模:

$$|\nabla u|_{(1/2,0)} = \sqrt{([u_x]_{1/2,0})^2 + ([u_y]_{1/2,0})^2 + \gamma^2}.$$

4) 根据加权最速下降方法:对散度项前面的加速因子梯度模,采取中心差商近似:

$$|\nabla u|_{(0,0)} =$$

$$1/2 \sqrt{(u_{(1,0)} - u_{(-1,0)})^2 + (u_{(0,1)} - u_{(0,-1)})^2}.$$

对数据项前面的加速因子,采取迎风格式近似

$$|\nabla u|_{(0,0)} =$$

$$\sqrt{(upwind D_x u_{(0,0)})^2 + (upwind D_y u_{(0,0)})^2}.$$

5) 梯度扰动正参数 γ 称为提升参数,为一个很小的正数;目的是避免图像变化缓慢区域梯度为零.

当在 $|\nabla u| \ll \gamma$ 的平坦区域时, $|\nabla u|_\gamma \approx \gamma^{1/2}$, 此时相当于将图像建模为 Sobolev 空间的调和函数;当 $|\nabla u| \gg \gamma$, $|\nabla u|_\gamma \approx |\nabla u|$, 由模型可知在图像梯度模值较大的区域相当于将图像建模为有界变差函数空间(BV 空间)的函数^[6]. 由于 BV 空间是比较合适的图像空间,因此 γ 取值应该很小. 实验证明当 $\gamma \leq 10^{-3}$ 时,对图像恢复的性能影响很小.

综上所述,将迭代形式记为 $u^{(n)} = F(u^{(n-1)}, u_0, \hat{\sigma}, \hat{p})$, 则图像恢复算法伪代码可归结为:

1) 设置初始参数 $\hat{\sigma} > 0$, $\hat{p} > 0$, 崩溃点 $k \in [1.141, 1.345]$, 梯度扰动正参数 $\gamma \leq 10^{-3}$, 最大迭代次数 $MaxS$, 时间迭代步长 Δt , 空间差分步长 h , 迭代过程样本噪声抽取时间变量 ES , $ES = \lfloor MaxS \rfloor / 4$;

2) for ($I = 1$; $I < MaxS$; $I++$)

{

if ($I \neq ES$)

 执行迭代 $u^{(I)} = F(u^{(I-1)}, u_0, \hat{\sigma}, \hat{p})$;

else

{

 计算残差图像 $u_0 - u^{(ES)}$, 在 $|\nabla u^{(ES)}| < k$ 的区域 $u_0 - u^{(ES)}$ 图像中随机抽取 L 个噪声样本;

 最大似然法求解 $\hat{\sigma}^{(ES)}, \hat{p}^{(ES)}$;

$\hat{\sigma} \leftarrow \hat{\sigma}^{(ES)}$;

$\hat{p} \leftarrow \hat{p}^{(ES)}$;

ES ← 2 × ES ;
 }
 }

3) 输出恢复图像 $u^{(MaxS)}$, 方差估计值 $\hat{\sigma}$, 形状参数估计值 $\hat{\rho}$.

3 实验结果与讨论

为验证推广模型和推导算法的有效性, 首先采用大小为 512×512 的国际标准测试灰度图像“Lena”作为样本图像(图 3(a)). 算法效果采用峰值信噪比(PSNR)和边缘保护指数(PEPA)^[4]评价, PSNR 能够衡量算法的去噪能力而 PEPA 能够很好地衡量算法恢复图像边缘保持性能, 两个指标均是越大越好, 其定义分别为

$$PSNR = 10 \lg \frac{u_{max}^{*2}}{\frac{1}{(MN)^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (u(i,j) - u^*(i,j))^2};$$

$$PEPA = -10 \lg \frac{\sum_{(i,j) \in edge(u^*)} |\nabla u(i,j) - \nabla u^*(i,j)|^2}{Num(edge(u^*))},$$

其中 u^* 为不含噪声的理想图像, u 为待评价的图像, $edge(u^*)$ 为 u^* 的边缘点集合, $Num(edge(u^*))$ 为理想边缘点个数. 对于理想边缘位置图和边缘点个数本文通过采取最佳实验阈值的 Canny

算子对 u^* 检测边缘得到理想边缘点个数 21220 个(图 3(b)).

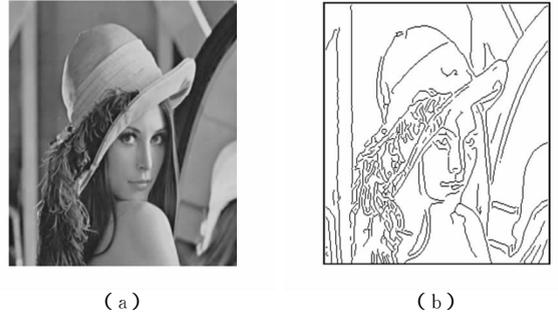


Fig. 3 Original Lena and ideal edge map. (a) The original Lena image and (b) The ideal edge map with 21220 edge pixels.

图 3 原始 Lena 和理想边缘图。(a) 原始 Lena (b) 理想边缘图(边缘点个数为 21220)

1) 高斯噪声情形与结果分析

将本文模型 $HB(u) + L^p$ 分别与 $SO(u) + L^2$, $TV(u) + L^2$ 进行比较. 实验中对 Lena 图像分别加入均值为 0 不同噪声方差(依次为 25, 20, 15)高斯噪声. 对后两种模型进行恢复时噪声的分布特性是已知的, 而利用本文模型 $HB(u) + L^p$ 进行恢复时噪声的分布特性未知, 方差 $\hat{\sigma}$, 形状参数 $\hat{\rho}$ 根据算法自动估计. 实验结果: 方差 $\hat{\sigma}$ 估计值分别为 24.76, 18.56, 14.87; 参数 $\hat{\rho}$ 估计值分别为 1.96, 1.93, 1.89, 算法迭代 8 次就能获得比较稳定的 PSNR 值. 相关计算资料如表 1 所示:

Table 1 Comparison of Restoration Results of Different Models in Gaussian Noise Case

表 1 高斯噪声情形的不同模型恢复结果比较

Image	Variance	$SO(u) + L^2$		$TV(u) + L^2$		$HB(u) + L^p$		Wiener Filtering Algorithm	
		PSNR	PEPA	PSNR	PEPA	PSNR	PEPA	PSNR	PEPA
Noisy Image	25	19.59	27.56	19.59	27.56	19.59	27.56	19.59	27.56
Restoration Image		24.52	27.27	26.55	30.14	27.54	30.56	26.30	28.96
Noisy Image	20	21.51	28.84	21.51	28.84	21.51	28.84	21.51	28.84
Restoration Image		25.13	28.46	27.47	31.55	28.51	31.98	27.23	30.76
Noisy Image	15	24.05	32.08	24.05	32.08	24.05	32.08	24.05	32.08
Restoration Image		26.24	29.98	28.85	33.44	29.25	34.31	28.12	33.12

图 4 所示为方差为 15 时不同模型的恢复结果. 从图 4 的目视效果来看, $SO(u) + L^2$ 明显模糊了帽沿等边缘细节, $TV(u) + L^2$ 在帽沿处保持边缘较好, 但在人的脸部、肩膀和背景等平坦区域产生了一些“阶梯效应”引起的虚假条纹, 而 $HB(u) + L^p$ 处理结果避免了阶梯效应, 既较好地保持了帽沿等

边缘细节, 同时去除了大量噪声. 从表 1 实验数据来看, $SO(u) + L^2$ 模型虽然能够增强峰值信噪比, 但是边缘保护指数有不同程度的下降, 说明该模型边缘保持效果不好. 标准 Wiener 滤波算法, $TV(u) + L^2$ 和 $HB(u) + L^p$ 都能提高边缘保护指数, $HB(u) + L^p$ 模型的边缘保持效果最佳.



Fig. 4 Comparison of denoising on the Gaussian noisy Lena image with variance of 15 under different variational models.

(a) Noisy Lena image with Gaussian noise ;(b) Using Wiener filter ;(c) Using $SO(u) + L^2$ model ;(d) Using $TV(u) + L^2$ model ;and (e) Using $HB(u) + L^p$ model.

图4 各种变分模型处理含高斯噪声(方差为15)Lena图像的恢复效果图。(a)高斯噪声污染Lena (b)应用Wiener滤波算法 (c)应用 $SO(u) + L^2$ 模型 (d)应用 $TV(u) + L^2$ 模型 (e)应用 $HB(u) + L^p$ 模型

2) 拉普拉斯噪声情形与结果分析

实验中对Lena图像分别加入均值为0不同噪声方差(依次为30, 25, 20)拉普拉斯噪声,将本文模型 $HB(u) + L^p$ 分别与 $SO(u) + L^1$, $TV(u) + L^1$ 进行比较,对后两种模型进行恢复时噪声的分布特性是已知的,而利用本文模型 $HB(u) + L^p$ 进行恢

复时噪声的分布特性未知,方差 $\hat{\sigma}$,形状参数 \hat{p} 根据算法自动估计.实验结果:方差 $\hat{\sigma}$ 估计值分别为28.59, 24.46, 18.37;参数 \hat{p} 估计值分别为0.93, 0.85, 0.82.图5所示为方差为25时拉普拉斯噪声不同模型的恢复结果,相关计算数据如表2所示.



Fig. 5 Comparison of denoising on the Laplace noisy Lena image with variance of 25 under different variational models.

(a) Noisy Lena image with Laplace noise ;(b) Using Wiener filter ;(c) Using $SO(u) + L^1$ model ;(d) Using $TV(u) + L^1$;and (e) Using $HB(u) + L^p$ model.

图5 各种变分模型处理含拉普拉斯噪声(方差为15)Lena图像的恢复效果图。(a)拉普拉斯噪声污染Lena (b)应用中值滤波算法 (c)应用 $SO(u) + L^1$ 模型 (d)应用 $TV(u) + L^1$ 模型 (e)应用 $HB(u) + L^p$ 模型

Table 2 Comparison of Restoration Results of Different Models in Laplace Noise Case

表2 拉普拉斯情形的不同模型恢复结果

Image	Variance	$SO(u) + L^1$		$TV(u) + L^1$		$HB(u) + L^p$		Median Filtering Algorithm(3×3)	
		PSNR	PEPA	PSNR	PEPA	PSNR	PEPA	PSNR	PEPA
Noisy Image	30	10.55	9.77	10.55	9.77	10.55	9.77	10.55	9.77
Restoration Image		17.35	15.13	22.53	30.14	22.04	30.56	23.84	25.17
Noisy Image	25	11.48	10.55	11.48	28.84	11.48	28.84	11.48	28.84
Restoration Image		20.42	18.46	25.86	31.55	25.42	31.98	25.76	26.36
Noisy Image	20	12.80	13.43	12.80	32.08	12.80	32.08	12.80	32.08
Restoration Image		22.32	22.98	28.42	33.44	27.96	34.31	27.33	27.72

由实验结果易知 $SO(u) + L^1$ 对拉普拉斯噪声恢复效果很差,传统 3×3 窗口中值滤波能够较好地处理拉普拉斯噪声,但是在帽穗处去除了部分细小边缘,而 $TV(u) + L^1$ 和 $HB(u) + L^p$ 的处理效果相当,均优于传统中值滤波.相比较而言,对于处理拉普拉斯噪声污染图像, $TV(u) + L^1$ 模型的处理效果视觉上稍优于 $HB(u) + L^p$ 模型,这是因为拉普拉斯噪声呈现的拖尾特性容易在图像中的平坦结构导致类似盐胡椒噪声的污染,而 $HB(u) + L^p$ 模型中在平坦区域基本采用 Sobolev 模型,去除盐胡椒噪声的能力较弱.而 $TV(u) + L^1$ 模型由于将图像沿着等灰度水平线进行各向异性扩散,当出现类似的盐胡椒噪声时,具有修补水平线的能力,因此效果较好.

3) 处理不同纹理细节图像与彩色图像的效果与分析

实验中,我们还对“Peppers”、“Boat”、“Barbara”

等具有不同结构细节的灰度图像(Peppers 纹理弱, Boat 纹理弱但细节多, Barbara 纹理强)进行处理,实验发现本文算法不管对高斯噪声和拉普拉斯噪声均能取得很好的结果.表 3 给出了这些图像在加入方差为 20,形状参数为 1.8 的广义高斯噪声后,不同模型处理的结果数据.表 3 的数据表明 $HB(u) + L^p$ 模型对于形状参数接近 2 的噪声,无论从峰值信噪比和边缘保护指数来看,处理效果都优于 $SO(u) + L^2$ 模型和 $TV(u) + L^2$.另外,由表 3 的数据可见,随着图像中的纹理细节程度增加,3 个模型的处理效果都有不同程度的下降,说明对于纹理图像,这些模型中的正则化项仍有待改进.对于彩色图像情形,一个直接的方法是对彩色图像进行逐通道处理, $HB(u) + L^p$ 的处理效果在高斯噪声情形效果最佳,在拉普拉斯噪声情形稍差于 $TV(u)$ 模型.

Table 3 Comparison of Restoration Results of Different Models Dealing with Different Test Images

表 3 不同模型对不同图像的恢复效果比较

Test Images	Noisy Image		$SO(u) + L^2$		$TV(u) + L^2$		$HB(u) + L^p$	
	PSNR	PEPA	PSNR	PEPA	PSNR	PEPA	PSNR	PEPA
Peppers	19.35	27.21	24.31	26.94	26.21	29.42	27.51	30.32
Boat	19.31	27.19	23.98	26.16	25.89	25.86	26.64	29.78
Barbara	19.25	27.07	23.64	25.64	25.44	25.42	26.20	29.16

4 结 语

本文从图像退化模型出发,基于最大后验概率和 MRF 理论的图像恢复描述框架,提出一个面向图像恢复的推广变分模型,并设计了梯度加权最速下降和半点格式的数值迭代的图像恢复算法.实验结果表明,当形状参数 $p = 2$,恢复算法对于高斯噪声污染图像能取得很好的恢复效果;当形状参数 $p = 1$,恢复算法比较适合处理脉冲噪声污染的图像,而且推广模型能自动区分污染图像中的噪声分布特性,对于拖尾分布噪声理论上也具有很好的恢复效果.由于彩色图像往往通道间存在相关性,可以考虑采取曲面方法^[9]改进正则化项将该模型推广到彩色图像情形;同时如何设计快速收敛和稳定的数值计算方法也是下一步研究方向.

参 考 文 献

[1] P Perona, J Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629-639

[2] J Weickert. A review of nonlinear diffusion filtering[G]. In: Scale-Space Theory in Computer Vision, LNCS 1252. Berlin: Springer, 1997. 3-28

[3] Gao Xin, Liu Laifu, Huang Haiyang. A survey-image analysis and processing using PDE and geometry curvature-driven diffusion[J]. Advance in Mathematics, 2003, 32(3): 285-294 (in Chinese)
(高鑫,刘来福,黄海洋.基于 PDE 和几何曲率流驱动扩散的图像分析与处理[J].数学进展,2003,32(3):285-294)

[4] Xie Meihua, Wang Zhengming. Edge directed enhancing based anisotropic diffusion denoising[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(1): 60-63 (in Chinese)
(谢美华,王正明.基于边缘定向增强的各向异性扩散抑噪方法[J].电子学报,2006,34(1):60-63)

[5] L Rudin, S Osher, E Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D, 1992, 60: 259-268

[6] D Cobson, C Vogel. Convergence of an iterative method for total variation denoising[J]. SIAM Journal of Numerical Analysis, 1997, 34(5): 1779-1791

[7] D Mumford, J Shah. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems[J]. Communication on Pure and Applied Mathematics, 1989, 42(5): 577-685

[8] Gao Song, T D Bui. Image segmentation and selective smoothing by using Mumford-Shah model[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2005, 14(10): 1537-1549

- [9] Xiao Liang , Wu Huizhong , Wei Zhihui . Research on generalized Mumford-Shah model for color image restoration and edge detection [J] . Chinese Journal of Computers , 2006 , 29(2) : 286-299 (in Chinese)
(肖亮 , 吴慧中 , 韦志辉 . 面向彩色图像恢复与边缘检测 Mumford-Shah 推广模型研究 [J] . 计算机学报 , 2006 , 29 (2) : 286-299)
- [10] C Cattani . Harmonic wavelets towards the solution of nonlinear PDE [J] . Computers and Mathematics with Applications , 2005 , 50(8) : 1191-1210
- [11] M N Do , M Vetterli . The finite ridgelet transform for image representation [J] . IEEE Trans on Image Processing , 2003 , 12 (1) : 16-28
- [12] A Ben Hamza , Hamid Krim , G B Unal . Unifying probabilistic and variational estimation [J] . IEEE Signal Processing Magazine , 2002 , 19(9) : 37-47
- [13] Zeng Sanyou , Kang Lishan , Ding Lixin . Adaptively choosing regularization operator by using an evolutionary algorithm in image restoration [J] . Journal of Computer Research and Development , 2003 , 40(4) : 584-588 (in Chinese)
(曾三友 , 康立山 , 丁立新 . 利用演化算法自适应选取正则算子 [J] . 计算机研究与发展 , 2003 , 40(4) : 584-588)
- [14] Kim Seongjai . PDE-based image restoration : A hybrid model and color image denoising [J] . IEEE Trans on Image Processing , 2006 , 15(5) : 1163-1170
- [15] S Geman , D Geman . Stochastic relaxation , Gibbs distributions and the Bayes in restoration of images [J] . IEEE Trans on PAM I , 1984 , 6(5) : 721-741
- [16] P Huber . Robust Statistics [M] . New York : Wiley , 1981
- [17] Zhang Xianda . Modern Signal Processing . 2nd Edition [M] . Beijing : Tinghua University , 2002
(张贤达 . 现代信号处理(第二版) [M] . 北京 : 清华大学出版社 , 2002)
- [18] Zhang Gongqing . Functional Analysis [M] . Beijing : Peking University Press , 2001
(张恭庆 . 泛函分析 [M] . 北京 : 北京大学出版社 , 2001)
- [19] M N Do , M Vetterli . Wavelet-based texture retrieval using generalized Gaussian density and Kullback-Leibler distance [J] . IEEE Trans on Image Processing , 2002 , 11(2) : 146-158
- [20] A Marquina , S Osher . A new time dependent model based on level set motion for nonlinear deblurring and noise remove [G] . In : Lecture Notes in Computer Science 1682 . Berlin : Springer , 1999 . 429-434



Xiao Liang , born in 1976 . Ph. D. Member of China Computer Federation . He currently works in Nanjing University of Science and Technology as a postdoctoral research fellow . His main research interests include variational PDE in image processing , multi-scale geometrical analysis , virtual reality and system simulation .
肖亮 , 1976 年生 , 博士 , 博士后在站研究人员 , 中国计算机学会会员 , 主要研究方向为变分偏微分方程在图像处理中的应用、多尺度几何分析、虚拟现实与系统仿真 .



Wei Zhihui , born in 1963 . Ph. D. , professor and Ph. D. supervisor . His current research interests include wavelet analysis , pattern recognition and image processing .
韦志辉 , 1963 年生 , 博士 , 教授 , 博士生导师 , 主要研究方向为小波分析、模式识别与图像处理 .



Wu Huizhong , born in 1942 . Professor and Ph. D. supervisor . Her current research interests include virtual reality , intelligent CAD and computer graphics and image processing .
吴慧中 , 1942 年生 , 教授 , 博士生导师 , 主要研究方向为虚拟现实、智能 CAD、计算机图形图像理论 .

Research Background

Image restoration is historically one of the oldest concerns in image processing and is still a necessary preprocessing step for many applications . The international popular topics on image restoration are the variational and PDE-based approaches . Although there are many energy variational functional models for dealing with the ill-posed problem of image restoration , while in many cases the noise is almost assumed to be the Gaussian distribution , hence the fidelity to the data is often measured by L^2 norm . However , the practical applications require more specific distributions , like the Laplace distribution and heavy tail distribution , for example . Our work addresses the issue of how to design the generalized variational functional model for image restoration . For the image fidelity term , the generalized model can automatically choose the suitable L^p norm for different noises and the distribution of noise is treated as the generalized Gaussian density . While for image regularization term , we use the Huber robust statistical theory to design the robust image prior model , which can deal different images with different structures . An adaptive algorithm is established , which can remove different noise while preserving salient feature such as edges and strong texture .

This work is supported by the National Natural Science Foundation of China (grant No. 60672074) , the Natural Science Foundation of Jiangsu Province (grant No. BK2006569) , and the Post-Doctor Foundation of China (grant No. 20060390285) and Jiangsu Province (grant No. 200601005B) respectively .